Une formulation mixte de poutre en flexion sous l'hypothèse d'Euler-Bernouilli

O. Wilk
Service d'études mécaniques et calcul scientifique
Institut AéroTechnique / C.N.A.M.
15, rue Marat - 78210 St Cyr L'Ecole

Ph. Destuynder, M. Salaün
Laboratoire de calcul scientifique
Institut AéroTechnique / C.N.A.M.
15, rue Marat - 78210 St Cyr L'Ecole

1. Le problème continu

Nous partons du modèle de poutre de type Euler-Bernouilli en limitant l'étude au mouvement de flexion. Nous désirons obtenir une formulation prenant en compte l'effet lié à l'effort tranchant sans utiliser la loi de comportement de Timoshenko. Nous utilisons pour cela la technique du multiplicateur de Lagrange associé à la déformation de cisaillement transverse. Nos inconnues sont donc la flèche w, la rotation β (de la normale) et l'effort tranchant T (le mutiplicateur de Lagrange). Cette formulation s'ecrit :

$$X = (w, \beta) \in V_1 \ , \quad T \in V_2$$

$$\forall Y \in V_1 \quad a(X,Y) + b(T,Y) = F(Y) \ , \quad \forall \xi \in V_2 \quad b(\xi, Y) = 0$$

où V_1 est un sous ensemble de $H^1(0,L)$ incluant les conditions aux limites imposées à la structure et $V_2 = L^2(0,L)$
avec

$$a(X,Y) = \int_{0L} EI \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} dx \ , \quad b(\xi, X) = \int_{0L} \xi(\beta + \frac{\partial w}{\partial x}) dx$$

$$et \quad F(Y) = \int_{0L} (F\omega + M\mu) dx (Y = (\omega, \mu)$$

On démontre que la forme bilinéaire a est continue, et coercive sur le noyau de la contrainte b et que b est continue et vérifie la condition inf-sup.

2. Le problème discret

Nous prenons des fonctions de forme polynômiale de degré 2 continues pour la flèche et la rotation, de degré 1 discontinues pour l'effort tranchant. Nous pouvons ainsi vérifier que la condition inf-sup discrète est satisfaite et que le problème discret admet une solution unique. Nous obtenons une estimation de l'erreur en $O(h^2)$ sur la flèche, la rotation, l'effort tranchant (ainsi que pour le moment de flexion).

Remarque : Une approximation P1 continue en rotation aurait pu suffire. Mais dans ce cas, l'erreur ne serait plus qu'en $O(h)$ sur la solution globale.

3. La résolution

Le système mixte obtenu peut être résolu de nombreuses manières (penalisation de la contrainte, pénalisation-dualité sur le système complet (cf. [2]), ...). L'utilisation de champs discontinus sur l'effort tranchant permet de résoudre le problème en projetant les déplacements sur le noyau de la contrainte, ce qui se traduit par une élimination locale des degrés de liberté internes en w et β. Nous passons ainsi de 6 à 4 variables cinématiques sur chaque élément, ce qui diminue de facon importante la taille du système linéaire à résoudre. L'effort tranchant (aussi éliminé du système par la projection) peut être ensuite évalué.

Bibliographie

[1] J.L Batoz et G. Dhatt - Modélisation des structures par éléments finis (volume 2) - Hermès, Paris, 1990.

[2] Ph. Destuynder et M. Salaün - A mixed finite element for shell model with free edge boundary conditions - Part 1. The mixed variational formulation - Part 2. The numerical scheme - Part 3. Numerical aspects (A paraître) - Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 120 p.p. 195-242.

[3] P. Hémon et O. Wilk - Modélisation des poutres droites d'Euler par éléments finis - rapport IAT 2305/A, 1995.