

# Identification de formes fluides par assimilation de données

Ph. Destuynder - H. Hadj-Amar \* - O. Wilk †

## Résumé

We present a method which allows to use experimental data in order to identify a part of the geometry of profil wake flows. This data assimilation problem use very few experimental data linked to a numerical simple fluid model.

## Notations

$\varphi$	potentiel	$\Gamma_\infty$	bord à l'infini	$\vec{V}_\infty$	vitesse à l'infini
$\varphi_D$	potentiel donné	$\Gamma_I$	bord à identifier	$\vec{V}_D$	vitesse observée
$\phi$	flux donné	$\Gamma_D$	bord d'observation	$\vec{\theta}$	vecteur de déformation
$\Omega$	domaine de calcul	$\vec{n}$	normale de bord		géométrie
		$\vec{\tau}$	tangente de bord	$\rho$	courbure

## 1 Introduction

L'analyse de l'écoulement de l'air est parfois complexe. L'outil expérimental permet de réaliser réellement cet écoulement mais l'accès à l'information peut être difficile. C'est un peu l'opposé pour l'outil numérique, il permet d'accéder aisément à l'information par contre la réalité de l'écoulement numérique est parfois discutable. Nous décidons donc d'utiliser ces deux outils ensemble pour parfaire cette analyse. Ce travail s'inspire de [1], [5], [6] et [7].

Notre objectif est d'aider l'ingénieur en charge d'étudier l'écoulement de l'air autour de l'objet par un traitement numérique, rapide en temps, conciliant les données expérimentales au modèle numérique fluide. Nous choisissons le fluide irrotationnel et incompressible permettant une résolution simple. De par ce choix, nous nous intéressons à l'identification de domaine fluide où  $rot \vec{V} = 0$ . Le domaine se définissant par son bord, nous le recherchons.

## 2 Problème

Nous considérons que nous connaissons une partie de ce bord sur lequel le fluide est irrotationnel et incompressible. Sur le bord que nous cherchons à identifier, nous imposons le flux à zéro. Nous recherchons donc une ligne de courant.

---

\*Chaire de calcul Scientifique / Cnam - Paris, France

†Institut AéroTechnique / Cnam - Saint-Cyr L'Ecole, France - wilk@iat.cnam.fr

Suivant le type d'écoulement, nous avons deux manières de poser le problème pour déterminer le potentiel fluide  $\varphi_D$  ( $\vec{\nabla}\varphi = \vec{V}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\varphi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_\infty} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_I} = 0 \\ \int_{\partial\Omega} \varphi ds = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

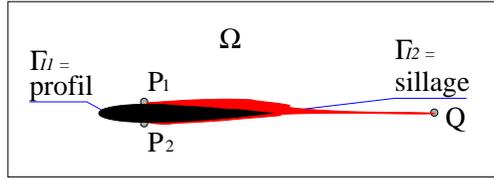


Figure 1 :  $\Gamma_I = \Gamma_{I1} \cup \Gamma_{I2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\varphi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_\infty} = \vec{V}_\infty \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_D} = \vec{V}_D \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_I} = 0 \\ \int_{\partial\Omega} \varphi ds = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

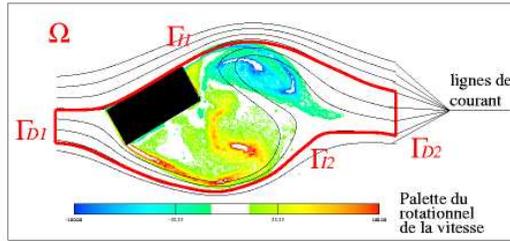


Figure 2 :  $\Gamma_I = \Gamma_{I1} \cup \Gamma_{I2}, \Gamma_D = \Gamma_{D1} \cup \Gamma_{D2}$

(1) est utile dans le cadre d'écoulement avec sillage confiné. La figure 1 montre symboliquement un sillage (rouge) où le rotationnel de la vitesse est non négligeable derrière un profil (noir). (2) sert pour des écoulements avec sillage non confiné. La figure 2 montre une solution Navier-Stokes stationnaire autour d'une forme rectangulaire. On remarque qu'il est difficile de trouver deux lignes proches (telles que la condition limite de Neumann sur  $\Gamma_D$  soit négligeable), passant de part et d'autre de l'objet rectangulaire sans que celles-ci soient dans la zone où le rotationnel de la vitesse est important.

Pour pouvoir identifier  $\Gamma_I$ , nous choisissons une fonctionnelle  $J_D$  contenant une information complémentaire  $\varphi_D(s) = \int_0^s \vec{V}_D \cdot \vec{\tau} ds$ . Nous minimisons :

$$J_D(\Gamma_I) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} (\varphi(\Gamma_I) - \varphi_D)^2 d\Gamma \quad (3)$$

en fonction de  $\Gamma_I$  soumis à la contrainte (1) ou (2).

### 3 Identifiabilité et stabilité

Nous utilisons les résultats présentés dans [2] sur le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\varphi = 0 \text{ dans } \Omega_{\Gamma_I} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \phi \text{ sur } \partial\Omega_{\Gamma} \setminus \Gamma_I \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_I \\ \int_{\Omega_{\Gamma}} \varphi ds = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

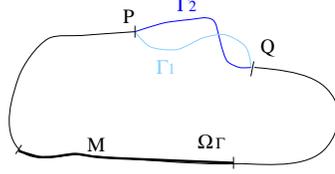


Figure 3 : Schéma générique du problème

qui nous donne :

**TH 1 (théorème d'identifiabilité)** Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux frontières possibles à identifier,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ayant les mêmes extrémités et étant de régularité  $C^{1,1}$ . On désigne par  $\varphi_i$  la solution de (4) pour  $\Gamma = \Gamma_i, i = 1, 2$ . Si  $\varphi_1|_M = \varphi_2|_M$  alors  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

Plus loin, nous modifions nos problèmes (1) et (2) pour qu'ils correspondent à celui présenté en figure 3.

La stabilité est assurée pour chaque direction de descente.

### 4 Gradient

Pour déterminer notre gradient nous exploitons les outils résultants des travaux de [3] bien repris dans [4]. Ainsi pour notre problème, nous avons le gradient suivant :

$$\left( \frac{\partial J_D}{\partial \Gamma_I}, \vec{\theta} \right) = \int_{\Gamma_I} \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial P}{\partial s} (\vec{\theta}, \vec{n}) d\Gamma \quad (5)$$

$P$  est l'état adjoint associé à  $\varphi$  et à  $J_D$ . Il vérifie le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta P = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial P}{\partial n} |_{\Gamma_D} = -(\varphi - \varphi_D) \\ \frac{\partial P}{\partial n} |_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} = 0 \\ \int_{\partial\Omega} P ds = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

## 5 Améliorations

Pour gagner en efficacité, nous pouvons modifier le problème (2) en deux problèmes du type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\varphi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma_D} = \vec{V}_D \cdot \vec{n} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma_I} = 0 \\ \int_{\partial\Omega} \varphi ds = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

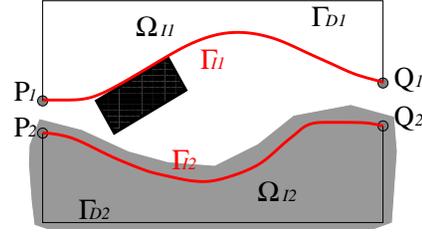


Figure 4 :  $\Omega = \Omega_{I1}$ ,  $\Gamma_I = \Gamma_{I1}$ ,  $\Gamma_D = \Gamma_{D1}$

La figure 4 illustre le fait que l'on peut décomposer le problème (2) en un problème associé à la ligne de courant supérieure et un second associé la ligne de courant inférieure. Il est donc possible de paralléliser !

Nous remarquons que nous pouvons poursuivre la parallélisation par une augmentation faible des observations (par rapport au nombre  $N$  d'observations existantes) pour séparer en deux le problème (7). De plus, la factorisation  $LDL^T$  utilisée pour résoudre ce problème coûte de l'ordre de  $N^3$  opérations. Ce qui fait que la somme des opérations des deux sous problèmes est à peine supérieure à un quart des opérations du problème entier.

Pour déterminer  $\varphi$  et  $P$ , nous utilisons une méthode d'équations intégrales (cf. [4]). Nous n'avons donc pas de maillage de surface. Ainsi, l'évolution du maillage au cours des itérations s'en trouve facilitée. Dans le cas des problèmes (1) et (2), nous travaillons avec le domaine extérieur (où l'écoulement est irrotationnel). Pour le problème (7), nous utilisons le domaine intérieur (où l'écoulement est irrotationnel).

Pour éviter d'avoir un bord  $\Gamma_I$  de régularité insuffisante, nous recherchons  $\Gamma_I$  dans l'espace des B-splines  $C^2$  cubiques uniformes. La jonction avec  $\partial\Omega \setminus \Gamma_I$  est  $C^0$ ,  $C^1$ . La dimension de l'espace des B-splines peut varier au cours du processus itératif. Cela permet de réduire le nombre d'inconnues à déterminer.

Bien que l'utilisation des B-splines réduit le soucis de croisement de bord lorsque celles-ci sont peu nombreuses, cela n'est pas suffisant. L'utilisation d'un critère supplémentaire  $J_C$  contrôlant la courbure est utile.

$$J_C(\Gamma_I) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} \rho^2 d\Gamma \quad (8)$$

Notre critère devient ( $\varepsilon$  : coefficient positif) :

$$J = J_D + \varepsilon * J_C \quad (9)$$

Remarque : L'utilisation des B-splines permet de calculer aisément le gradient de courbure.

Le choix des points  $P_1$  et  $Q_1$  s'effectue avec la condition d'existence du problème (7). Celui-ci semble parfois sensible.

## 6 Applications numériques

Nous vérifions le fonctionnement de la méthode proposée à l'aide de la solution analytique de l'écoulement potentiel dans le cas du cercle (de rayon 5 centré à l'origine,  $\vec{V}_\infty = (1, 0)$ ).

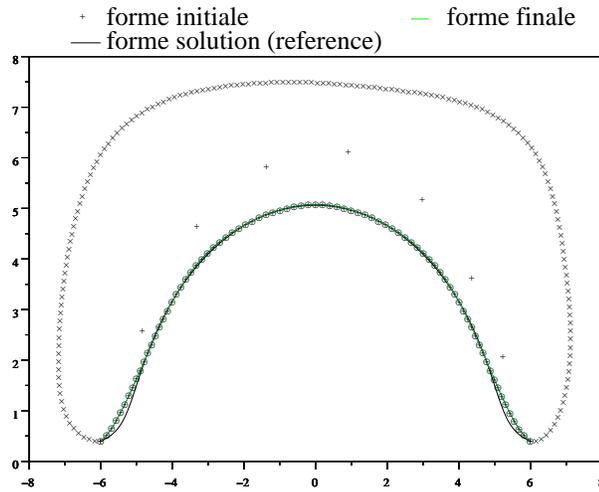


Figure 5 : forme initiale + forme finale + forme solution

Nous remarquons que la forme finale est proche de la ligne de courant. Nous notons aussi que  $J_D$  est à la fin du calcul petit ( $5 \cdot 10^{-5}$ ). De plus le rapport entre  $J_D$  finale sur  $J_D$  initiale est de l'ordre de  $10^{-7}$  !

Plus concrètement, nous poursuivons les calculs en utilisant des données  $\vec{V}_D$  obtenues à l'aide du calcul Navier-Stokes présenté en figure 6.

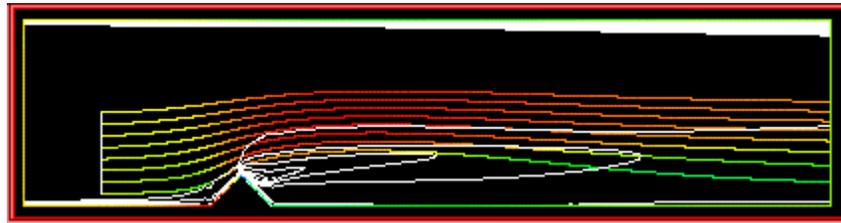


Figure 6 : Lignes de courant d'une solution Navier-Stokes près d'un plancher sur lequel est placé un obstacle triangulaire

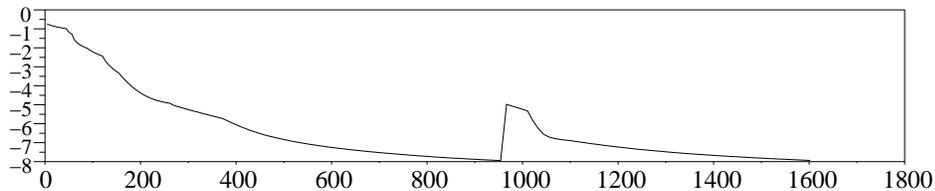


figure 7 :  $\text{Log}_{10}(J_D)$  en fonction du temps en seconde (sur HPUX700) (Le saut de  $J$  (vers 1000 s correspond à l'augmentation du nombre de données).

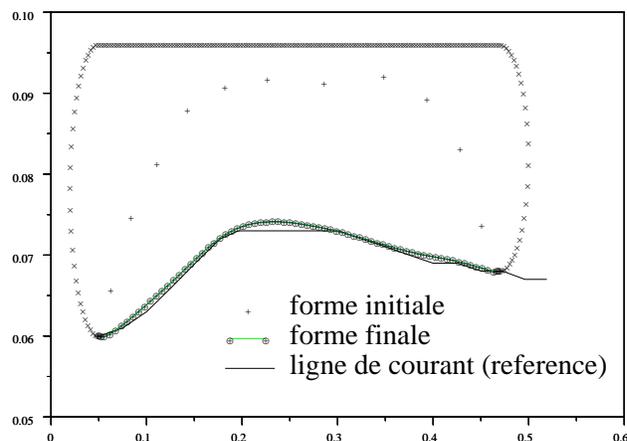


Figure 8 : forme initiale + forme finale + forme solution

Nous remarquons que nous retrouvons avec une très bonne précision la ligne de courant recherchée en un temps inférieur à 30 mn sur HPUX700. C'est plutôt rapide. Nous notons aussi que  $J_D$  est à la fin du calcul très petit (exactement  $1.158 \cdot 10^{-8}$ ). De plus le rapport entre  $J_D$  finale sur  $J_D$  initiale est inférieur à  $10^{-7}$  ! Avec des données bruitées jusqu'à 1% de la norme *inf*, les résultats restent d'une qualité équivalente.

## 7 Conclusions

Avec des données en nombre raisonnable (autour de la centaine), les solutions obtenues sont d'une très bonne précision pour un temps de calcul rapide. Mais il nous reste (entre autres) à comprendre l'effet d'une erreur sur la condition d'existence vis à vis des points d'attache de  $\Gamma_I$ .

## Références

- [1] F. X. Le Dimet et O. Talagrand - Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects - *Tellus* 38A, p. 97-110, 1986.
- [2] S. Andrieux, A. Ben Abda et M. Jaoua - Identifiabilité de frontières inaccessibles par une mesure de surface - *Les Annales Maghrébines de l'Ingénieur* Vol. 7, n 1, Avril 1993.
- [3] Francois Murat et Jacques Simon - Sur le contrôle par un domaine géométrique - *Thèse de doctorat d'état, Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris VI, L.A. 189* 1976.
- [4] Flore Molenda - Construction numérique du sillage aérodynamique derrière un profil - *Thèse de doctorat, Chaire de Calcul Scientifique du Cnam* 2001.
- [5] O. Wilk - Assimilation de données expérimentales obtenues dans le sillage d'une automobile - *Rapport Institut AéroTechnique - Cnam* n 2379, 1997.
- [6] H. Hadj-Amar et O. Wilk - Assimilation de données derrière un profil - *Canum* 1999.
- [7] H. Hadj-Amar et O. Wilk - Assimilation de données derrière un profil bidimensionnel - *Actes du colloque FLUVISU* 1999.