

Modélisation et contrôle des ondes locales dans les bi-matériaux

PH. DESTUYNDER^a, O. WILK^a

a. Conservatoire National des Arts et Métiers (Cnam) - 292, rue saint Martin - 75141 Paris.

Résumé :

L'étude proposée concerne les ondes acoustique stationnaires dans un bi-matériau. Le modèle de structure utilisé est celui d'une membrane hétérogène. La partie où la vitesse d'onde est la plus faible, agit comme un piège pour l'énergie vibratoire. En utilisant le concept de taux de restitution dynamique il est possible de calculer cette énergie piégée à l'aide de grandeurs localisées à l'interface entre les deux matériaux. Puis en utilisant une méthode de contrôle optimal dans laquelle le coût du contrôle est évanescent, on construit un asservissement qui supprime les surcontraintes qui se développent à l'interface entre les deux milieux et qui sont étroitement liées à l'énergie localisée dans la partie souple de la structure. Ceci a pour conséquence de diminuer la vitesse d'endommagement de l'interface. Mais c'est aussi une stratégie de réduction des vibration dans les structures.

Abstract :

This study concerns acoustic waves in an heterogeneous media made of two different materials. The structural model is a membrane. The part in which the wave velocity is the smaller acts as a trap for the vibrating energy. Making use of a dynamic energy release rate, it is possible to compute this energy, only with local informations in a close neighbourhood of the interface between the two media. From an optimal control strategy, in which the cost of the control tends to zero, a control method is suggested in order to reduce the overstressing at the interface which is at the origin of a damage mechanism. But this analysis also suggests a new strategy for vibration reduction in structures.

Mots clefs : Ondes acoustiques, taux de restitution de l'énergie, contrôle optimal.

1 Introduction

Cette étude concerne les ondes acoustiques d'une structure constituée de deux matériaux (voir figure 1). Celle-ci occupe un domaine Ω . Elle est encastrée sur sa frontière externe Γ_0 . Le domaine Ω est constitué de Ω_+ où la vitesse d'onde est c_+ et de Ω_- où la vitesse d'onde est c_- ainsi que d'une interface Γ_i . Le problème consiste à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } y(x, t) \text{ où } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \text{div}(c^2 \nabla y) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ y(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times [0, T] \text{ et } y(x, 0) = y_0(x), \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) \text{ dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

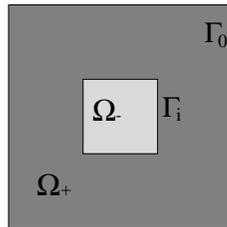


FIG. 1 – Les différents domaines Ω_+ et Ω_- , le bord Γ_0 et l'interface Γ_i

Les modes propres $\{(w_k, \lambda_k), k = 1, \infty\}$ associés à l'opérateur stationnaire de l'équation des ondes (1) sont

solution de :

$$\begin{cases} \text{trouver } (w_k, \lambda_k), w_k \in H_0^1[\Omega] \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{R}^+, \\ -\text{div}(c^2 \nabla w_k) = \lambda_k w_k \text{ dans } \Omega, \\ w(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \int_{\Omega} |w_k|^2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

De façon classique on peut écrire la solution de (1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) w_k(x) \\ \text{avec } \alpha_k(t) = \left[\int_{\Omega} y_0 w_k d\Omega \right] \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \left[\int_{\Omega} y_1 w_k d\Omega \right] \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k} t)}{\sqrt{\lambda_k}}. \end{cases} \quad (3)$$

En fait, il existe deux sous-familles de vecteurs propres notées $\{w_k^G, k = 1, \infty\}$ et $\{w_k^L, k = 1, \infty\}$ correspondant respectivement aux modes globaux et locaux. Il est donc naturel d'écrire :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^G(t) w_k^G(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^L(t) w_k^L(x). \quad (4)$$

Les modes locaux étant responsables des surcontraintes au voisinage de Γ_i , il est intéressant de pouvoir évaluer leur énergie sans être obligé pour autant de calculer ces modes propres, ce qui d'ailleurs, est numériquement très difficile. Pour cette raison nous proposons une méthode basée sur un taux de restitution dynamique qui étend au cas dynamique une méthode utilisée en mécanique de la rupture statique [1].

La méthode de calcul de l'énergie proposée est capable d'évaluer séparément les énergies localisée dans la partie la plus souple et celle qui est globale. En fait, elle ne fera intervenir que des grandeurs (déplacements et contraintes) sur Γ_0 (énergie des modes globaux) et Γ_i (énergie des modes locaux).

2 Calcul des énergies locales et globales

Commençons par mettre en évidence la présence des ondes locales sur un exemple simple mais générique. En utilisant un invariant énergétique de l'équation des ondes, on met en évidence une nouvelle forme quadratique qui découple les deux énergies locale et globale tout en permettant un calcul numérique fiable à moindre coût.

2.1 Un exemple simple générique

Soit une membrane occupant l'ouvert $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ constituée de deux matériaux de vitesse d'onde c_- dans Ω_- et c_+ dans Ω_+ ($c_- < c_+$) (voir figure 2). Les vecteurs propres w_k solutions de (2) sont cherchés sous la forme suivante :

$$w_k(x_1, x_2) = q_k(x_1) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{H}\right). \quad (5)$$

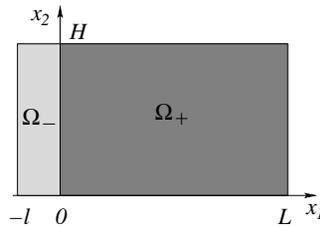


FIG. 2 – Géométrie du problème simple générique

En utilisant (5), le problème (2) se réduit à trouver q_k telle que :

$$\begin{cases} K_k q_k + c^2 \frac{\partial^2 q_k}{\partial x_1^2} = 0 \text{ pour } -l \leq x_1 \leq L \text{ (avec } K_k = \lambda_k^2 - (\frac{c_k \pi}{H})^2), \\ q_k(-l) = q_k(L) = 0 \text{ et } q_k(0_-) = q_k(0_+), c_-^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_1}(0_-) = c_+^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_1}(0_+). \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi en fonction du signe de K_k , nous avons trois cas possibles. S'il est positif, les solutions sont de formes sinusoïdales réelles. S'il est négatif avec c égale à c_+ et positif avec c égale à c_- , les solutions sont des exponentielles décroissantes en x_2 dans Ω_+ et sinusoïdales dans Ω_- (voir figure 3). S'il est négatif, les solutions sont toujours nulles (voir [2] et [3]).

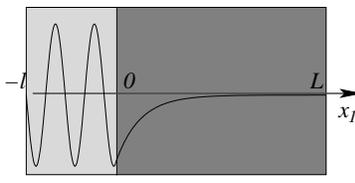


FIG. 3 – Allures des solutions pour K_k négatif

2.2 Calcul des énergies

Nous recherchons une caractérisation de l'énergie vibratoire en utilisant le taux de restitution dynamique [3]. Pour cela introduisons la quantité :

$$\begin{cases} G^\theta = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{S(\Gamma + \eta\theta) - S(\Gamma)}{\eta} \\ \text{avec } S(\Gamma) = \frac{1}{2T} \int_0^T (E_c(t) - E_p(t)) dt \text{ et } \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_i \end{cases} \quad (7)$$

Le champ de vecteurs θ représente un mouvement virtuel de la ligne Γ . En prenant $\theta = x - x_0$ ($x, x_0 \in \mathbb{R}^2$, x_0 étant un point arbitraire), nous obtenons le résultat suivant [2] :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G^\theta = E_c(\Omega) + E_p(\Omega). \quad (8)$$

Il est alors possible de calculer G^θ de deux manières [3] : soit à l'aide d'intégrales de domaine, soit à l'aide d'intégrales de contour. Dans ce dernier cas, qui est obtenu par intégrations par parties, l'expression de G^θ est notée Λ^θ . Un simple calcul donne :

$$G^\theta = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_\Omega (|\dot{y}|^2 + c^2 |\nabla y|^2) \operatorname{div}(\theta) - \frac{1}{T} \int_0^T \int_\Omega c^2 (D\theta \nabla y \cdot \nabla y) + \frac{1}{T} \left[\int_\Omega \dot{y} \nabla y \cdot \theta \right]_0^T, \quad (9)$$

$$\Lambda^\theta = \frac{c^2}{2T} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 \theta \cdot \nu + \frac{[c_+^2 - c_-^2]}{2T} \int_0^T \int_{\Gamma_i} \left[\frac{c^4}{c_+^2 c_-^2} \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial y}{\partial s} \right|^2 \right] \theta \cdot \nu. \quad (10)$$

Il est utile de souligner que G^θ et Λ^θ sont identiques tant que l'expression exacte de y est utilisée. En outre, on constate dans l'expression de Λ^θ que seules la valeur de la composante normale du vecteur θ sur Γ_i intervient. C'est ainsi qu'il est possible d'utiliser un relèvement arbitraire (mais assez régulier) de $\theta \cdot \nu$ dans le domaine Ω . Sur le plan numérique les deux expressions de G^θ ne sont plus identiques, mais proches. Celle faisant intervenir les intégrales sur Ω sont plus stables. Un exemple de calcul confirmant ces résultats théoriques est reporté sur la figure 4.

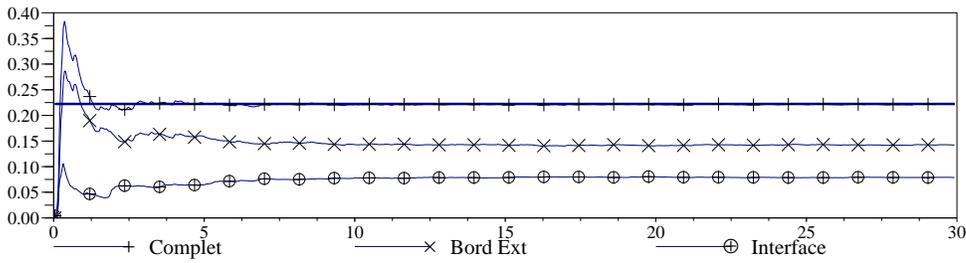


FIG. 4 – Evolutions séparées de G^θ pour Γ_0 et Γ_i ainsi que $\Gamma_0 \cup \Gamma_i$ (complet) avec $(c_-, c_+) = (\sqrt{0.05}, 1)$, $(y_0, y_1) = (0.1 \exp(-200(x_1^2 + x_2^2)), 0)$, Ω_- carré de côté 0.4 centré dans Ω_+ de côté 1.2 (voir figure 1). La courbe G^θ (complet) converge vers la valeur de l'énergie totale de la structure.

3 Contrôle des énergies locale et globale

Les énergies peuvent être calculées à partir d'informations au bord et à l'interface. En particulier, l'énergie locale évaluée au voisinage Γ_i est susceptible d'endommager cette interface. Une stratégie possible est de minimiser l'énergie de la structure à l'aide des contrôles u_0 et u_i qui seraient placés respectivement sur Γ_0 et Γ_i . Pour cela, nous proposons une méthode de contrôle optimal.

3.1 Le problème de contrôle

Le problème acoustique avec contrôle s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } y(x, t) \text{ où } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \text{div}(c^2 \nabla y) = u_i \delta_{\Gamma_i} \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ y(t) = u_0 \text{ sur } \Gamma_0 \times [0, T] \text{ et } y(0) = y_0, \frac{\partial y}{\partial t}(0) = y_1 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Nous souhaitons minimiser l'énergie de la structure à l'instant final T tout en pondérant les contrôles par le paramètre ε ($\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$). Le modèle est le suivant :

$$J_\varepsilon(u_0, u_i) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left| \frac{\partial y}{\partial t}(T) \right|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega c^2 |\nabla y(T)|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \left[\int_{\Gamma_0} |u_0|^2 + \int_{\Gamma_i} |u_i|^2 \right]. \quad (12)$$

Le problème adjoint, nous permettant de calculer le gradient de J_ε en (u_0, u_i) , s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } p(x, t) \text{ où } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \text{div}(c^2 \nabla p) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ p(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times [0, T] \text{ et } p(T) = \frac{\partial y}{\partial t}(T), \frac{\partial p}{\partial t}(T) = \text{div}(c^2 \nabla y(T)) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (13)$$

Nous avons ainsi comme condition d'optimalité (ν normale extérieure de Γ_0) :

$$u_0 = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial \nu} \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } u_i = -\frac{p}{\varepsilon} \text{ sur } \Gamma_i. \quad (14)$$

3.2 Développement asymptotique à coût évanescent

En fixant le temps final T (assez grand) et en faisant tendre ε vers 0, nous construisons un développement asymptotique formel de y , p et u de la manière suivante :

$$\begin{cases} y^\varepsilon = y^0 + \varepsilon y^1 + \dots \\ p^\varepsilon = p^0 + \varepsilon p^1 + \dots \\ u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots \end{cases} \quad (15)$$

A l'ordre 0 en ε , le problème vérifié par p^0 associé aux conditions d'optimalité du même ordre entraîne que p^0 est identiquement nul. Il est intéressant de souligner qu'en conséquence, nous obtenons que :

$$y^0(T) = 0 \text{ et } \frac{\partial y^0}{\partial t}(T) = 0. \quad (16)$$

A l'ordre 1 en ε , le problème vérifié par p^1 peut s'écrire :

$$\begin{cases} \text{trouver } p^1(x, t) \text{ où } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial^2 p^1}{\partial t^2} - \text{div}(c^2 \nabla p^1) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ p^1(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times [0, T] \text{ et } p^1(0) = p_0^1, \frac{\partial p^1}{\partial t}(0) = p_1^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (17)$$

Les conditions initiales p_0^1 et p_1^1 sont inconnues. Elles sont déterminées dans la suite. Une fois connues p_0^1 et p_1^1 , il est possible de calculer $p^1(t)$ et donc les contrôles u_0 et u_1 . La méthode est en fait celle proposée par J.L. Lions et appelée méthode HUM. Mais dans le cas traité ici, il est possible de simplifier le calcul de l'état adjoint comme il est proposé dans la section suivante.

3.3 Détermination des conditions initiales du problème adjoint à l'ordre 1

Pour identifier les conditions initiales de (17), nous faisons intervenir un état virtuel noté q vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \text{div}(c^2 \nabla q) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ q(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \times [0, T] \text{ et } p^1(0) = q_0, \frac{\partial p^1}{\partial t}(0) = q_1, \forall (q_0, q_1) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (18)$$

En écrivant la formulation variationnelle du problème acoustique en y^0 avec comme variable virtuelle q et en appliquant la formule de Stokes, nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \int_{\Gamma_i} p^1 q + \int_0^T \int_{\Gamma_0} c^4 \frac{\partial p^1}{\partial \nu} \frac{\partial q}{\partial \nu}}_{A_T(P^1, Q)} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{\Omega} y_1 q_0 - \int_{\Omega} y_0 q_1}_{b(Q)}, \quad \forall q, q_0, q_1 \text{ associés à (18),} \quad (19)$$

$P^1 = (p_0^1, p_1^1) \text{ et } \forall Q = (q_0, q_1).$

La forme de l'opérateur $A_T(P^1, Q)$ rend la résolution complète de (19) difficile à envisager, du moins sous cette forme. En étudiant numériquement $A_T(P^1, Q)$ lorsque T tend vers l'infini, nous constatons que $A_T(P^1, Q)$ converge vers une valeur constante comme sur le cas de la figure 5. Il est aussi intéressant de souligner que le terme associé à Γ_i est négligeable.

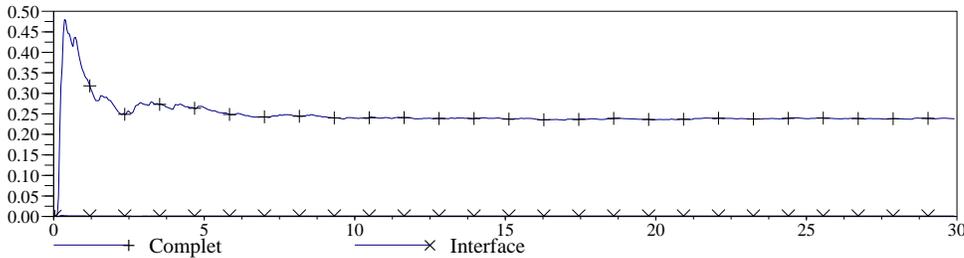


FIG. 5 – Evolutions de $A_T(P^1, Q)$ (Complect) en fonction de T et de la partie associée à Γ_i de $A_T(P^1, Q)$ (Interface) avec $(c_-, c_+) = (\sqrt{0.05}, 1)$ et (y_0, y_1) du cas de la figure 4.

C'est pourquoi il est loisible de remplacer (à un coefficient ρ près), le terme $A_T(P^1, Q)$ par $E(P^1, Q)$ lorsque T tend vers l'infini. Ce dernier s'écrit :

$$E(P^1, Q) = \int_{\Omega} p_1^1 q_1 + \int_{\Omega} c^2 \nabla p_0^1 \cdot \nabla q_0. \quad (20)$$

En modifiant l'opérateur, nous faisons disparaître l'intégrale en temps et de plus il y a éclatement du modèle (19) en deux sous-problèmes très simples permettant de déterminer les conditions initiales p_0^1 et p_1^1 à un coefficient près. Plus précisément, on obtient :

$$\begin{cases} \text{div}(c^2 \nabla p_0^1) = \frac{1}{T} y_1 \text{ dans } \Omega, & \text{et } p_1^1 = \frac{1}{T} y_0 \text{ dans } \Omega. \\ p_0^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (21)$$

Le coefficient multiplicateur ρ reliant $A_T(P^1, Q)$ à $E(P^1, Q)$ dans l'approximation proposée, est déterminé de la façon suivante. Ayant les conditions initiales (y_0, y_1) , on calcule les conditions initiales (p_0^1, p_1^1) . Les contrôles sont obtenus en utilisant les conditions d'optimalité à l'ordre 1 en ε :

$$u_0 = c^2 \frac{\partial p^1}{\partial \nu} \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } u_i = -p^1 \text{ sur } \Gamma_i. \quad (22)$$

Une fois les contrôles (u_0, u_i) calculés, il est possible de calculer $y_{\text{contrôle}}$ vérifiant (11), mais aussi $y_{\text{sanscontrôle}}$ vérifiant (11) pour des contrôles nuls. Finalement, la solution générale peut s'écrire :

$$y = y_{\text{sanscontrôle}} + \rho y_{\text{contrôle}}. \quad (23)$$

Le coefficient ρ est estimé en minimisant l'énergie :

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial y}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c^2 |\nabla y|^2. \quad (24)$$

L'équation d'Euler ($\frac{\partial J_0}{\partial \rho} = 0$) donne le ρ optimal à utiliser :

$$\rho_{optimal} = \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial y_{sanscontrôle}}{\partial t} \frac{\partial y_{contrôle}}{\partial t} + \int_{\Omega} c^2 \nabla y_{sanscontrôle} \cdot \nabla y_{contrôle}}{J_0(0)}. \quad (25)$$

3.4 Exemples numériques

Dans les exemples proposés, seul le contrôle à l'interface est utilisé. La résolution de (21) est limitée à un petit voisinage de Γ_i noté ω_{Γ_i} et seule le terme $J_0(\rho)$ portant sur ω_{Γ_i} est utilisé pour déterminer le ρ optimal (25). Les résultats sont présentés sur la figure 6.

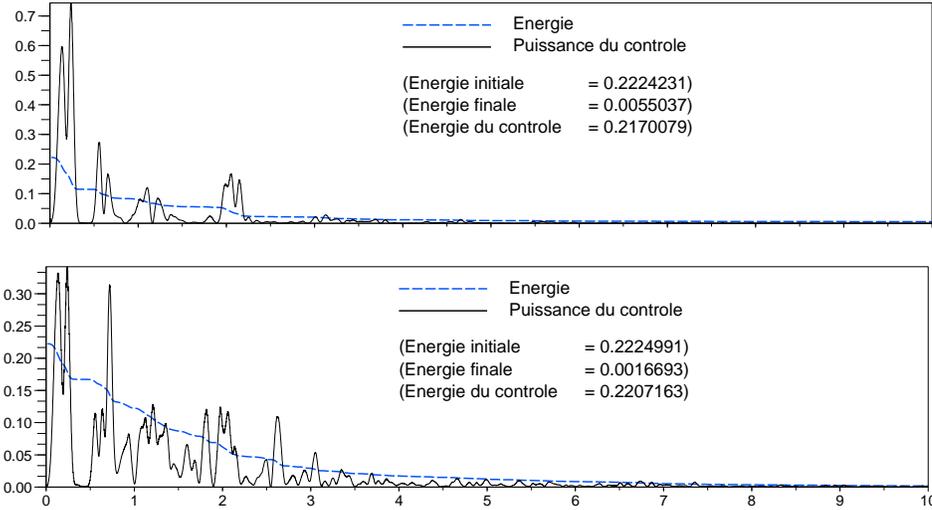


FIG. 6 – Evolutions de l'énergie totale et de la puissance du contrôle avec pour le graphe du haut $(c_-, c_+) = (\sqrt{0.05}, 1)$, celui du bas $(c_-, c_+) = (\sqrt{0.8}, 1)$. (y_0, y_1) correspond au cas de la figure 4.

On voit sur ces exemples (figure 6) qu'il est possible d'avoir un contrôle efficace dans les deux cas extrêmes où c_- est éloigné ou proche de c_+ . On note aussi que le contrôle ne génère pas de parasite. Enfin, il faut souligner qu'en multipliant c_- et c_+ par 1000 pour nous ramener à un matériau plus réaliste, ces résultats sont obtenus en 1/100 de seconde à l'échelle de temps du problème (la dimension de la vitesse d'onde c étant en m/s).

4 Conclusion

Le calcul de l'énergie vibratoire par le taux de restitution dynamique (9) ou (10), permet d'obtenir un critère de contrôle fiable pour envisager un retard de l'endommagement d'une interface entre deux matériaux. Les résultats reportés sur la figure 6 et obtenus avec un contrôle (22) ne prenant en compte que des mesures locales à l'interface et au bord, illustrent ces propos.

Références

- [1] Destuynder Ph. et Djaoua M. . Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de rice en mécanique de la rupture fragile. Math. Meth. in the Applied Scie., vol. 3, 1981.
- [2] Destuynder Ph. et Wilk O. . Ondes locales dans les milieux hétérogènes : Aspects numériques. Arima, Inria, 2007.
- [3] Destuynder Ph. . Vibrations des structures et des systèmes couplés. Hermes science, 2007.