

Une méthode de Simulation pour la Mixture de lois

Dans ce papier nous allons présenter une méthode de simulation pour la mixture de lois. Cette méthode est basée sur la méthode d'inversion et est applicable dans le cas où nous avons des lois dont les fonctions de répartition réciproques ont une expression explicites.

Soit X une variable aléatoire dont la loi admet la densité :

$$f(x) = \sum_{i=1}^K \theta_i f_i(x) \quad (1)$$

où pour $i = 1, \dots, K$, $0 < \theta_i < 1$ et $\theta_1 + \dots + \theta_K = 1$, $f_1, \dots, f_K$ sont des densités de probabilités de fonctions de répartition $F_1, \dots, F_K$.

Notons $F_1^{-1}, \dots, F_K^{-1}$ les fonctions réciproques de $F_1, \dots, F_K$. Pour simuler X on a la proposition suivante :

Proposition Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Alors, la variable aléatoire X définie par :

$$X = \begin{cases} F_1^{-1} \left(\frac{U}{\theta_1} \right) & \text{si } 0 \leq U < \theta_1 \\ F_2^{-1} \left(\frac{U - \theta_1}{\theta_2} \right) & \text{si } \theta_1 \leq U < \theta_1 + \theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ F_i^{-1} \left(\frac{U - \theta_1 - \dots - \theta_{i-1}}{\theta_i} \right) & \text{si } \theta_1 + \dots + \theta_{i-1} \leq U < \theta_1 + \dots + \theta_i \\ \vdots & \vdots \\ F_K^{-1} \left(\frac{U - \theta_1 - \dots - \theta_{K-1}}{\theta_K} \right) & \text{si } \theta_1 + \dots + \theta_{K-1} \leq U < 1 \end{cases}$$

a pour densité f donnée par (1).

Démonstration Pour toute fonction h continue à support compact on a :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^K \int_{\theta_1 + \dots + \theta_{i-1}}^{\theta_1 + \dots + \theta_i} h \left(F_i^{-1} \left(\frac{u - \theta_1 - \dots - \theta_{i-1}}{\theta_i} \right) \right) du \quad (2)$$

En effectuant le changement de variable :

$$x = F_i^{-1} \left(\frac{u - \theta_1 - \dots - \theta_{i-1}}{\theta_i} \right)$$

On obtient :

$$u = \theta_1 + \dots + \theta_{i-1} + \theta_i F_i(x)$$

d'où $du = \theta_i f_i(x) dx$. En emportant dans (2), on obtient :

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=1}^K \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \theta_i f_i(x) dx$$

Exemple Soit X une variable aléatoire dont la loi admet la densité :

$$g_{a,\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{x + \sqrt{a + \lambda^2}}{a} & \text{si } -\sqrt{a + \lambda^2} \leq x \leq -\lambda \\ \frac{-\lambda + \sqrt{a + \lambda^2}}{a} & \text{si } -\lambda \leq x \leq \lambda \\ \frac{\sqrt{a + \lambda^2} - x}{a} & \text{si } \lambda \leq x \leq \sqrt{a + \lambda^2} \end{cases}$$

où $a > 0$ et $\lambda > 0$. $g_{a,\lambda}$ peut s'écrire sous la forme :

$$g_{a,\lambda}(x) = \frac{(\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda)^2}{2a} f_1(x) + \frac{2\lambda (\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda)}{a} f_2(x) + \frac{(\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda)^2}{2a} f_3(x)$$

$$\text{avec } \begin{cases} f_1(x) = \frac{2(x + \sqrt{a + \lambda^2})}{(\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda)^2} \mathbb{1}_{[-\sqrt{a + \lambda^2}, -\lambda]}(x) \\ f_2(x) = \frac{1}{2\lambda} \mathbb{1}_{[-\lambda, \lambda]}(x) \\ f_3(x) = \frac{2(\sqrt{a + \lambda^2} - x)}{(\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda)^2} \mathbb{1}_{[\lambda, \sqrt{a + \lambda^2}]}(x) \end{cases}$$

Les fonctions de répartition correspondantes sont données par :

$$\begin{cases} F_1(x) = \left(\frac{x + \sqrt{a + \lambda^2}}{\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda} \right)^2 \\ F_2(x) = \frac{x + \lambda}{2\lambda} \\ F_3(x) = 1 - \left(\frac{\sqrt{a + \lambda^2} - x}{\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda} \right)^2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} F_1^{-1}(U) = -\sqrt{a + \lambda^2} + (\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda) \sqrt{U} \\ F_2^{-1}(U) = \lambda (2U - 1) \\ F_3^{-1}(U) = \sqrt{a + \lambda^2} - (\sqrt{a + \lambda^2} - \lambda) \sqrt{1 - U} \end{cases}$$

On remarque que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} g_{a,\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{a}}\right) \mathbb{1}_{[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]}(x)$ ce qui la densité de la loi triangulaire sur l'intervalle $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.

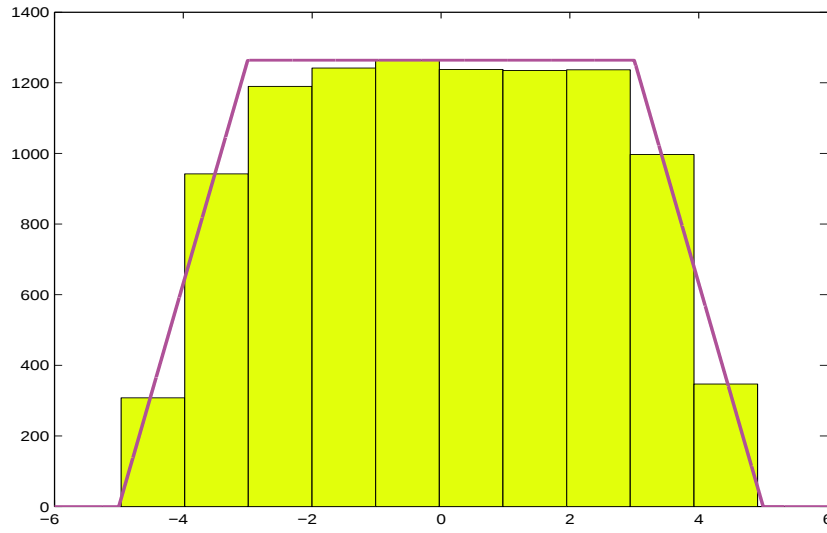


Figure 1 – simulation pour $a = 16$ et $\lambda = 3$

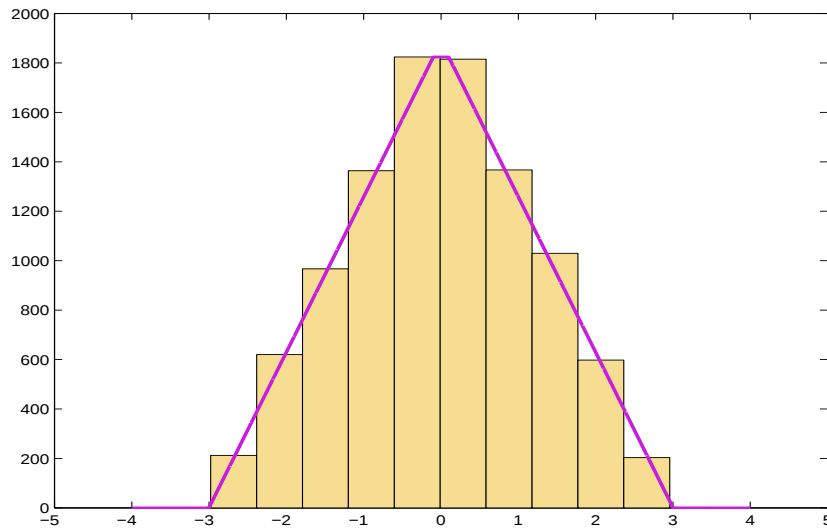


Figure 2 – simulation pour $a = 9$ et $\lambda = 0.1$

Références

- [1] Devroye, L., *Non-uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [2] Ghorbanzadeh.D, *Probabilités. Exercices corrigés*. Éditions Technip, Paris, 1998.
- [3] Knuth, D.E., *The Art of Computer Programming, Vol. 2 : Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, MA (1981).
- [4] Law, A.M. and Kelton , *Simulation Modelling and Analysis*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition (1991).
- [5] Ross, S.M., *Simulation*. Academic Press, 2nd edition (1996).