

Devoir N°1

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{K}{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}$$

où $\theta > 0$ et K est une constante.

1. Exprimer K en fonction de θ de sorte que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
2. Pour quelle valeur de θ a-t-on $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = 1$?

Exercice 2

On considère la suite de fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^n}{(1+x)^{n+2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'on pose : $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$ et $J_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx$.

1. Exprimer I_n et J_n en fonction de n .
2. Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$.
3. Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^2(x) \right) dx$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - |x| & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 6x^2 - \frac{1}{2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Pour $\theta > 0$, Comparer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \theta) dx$.
2. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, Comparer $I_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx$ et $J_m = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^m f(x) dx$.

corrigé de devoir N°1

1 Notons : $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$.

1. Du fait que f est paire on a :

$$I_1 = 2K \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^{\theta x} + e^{-\theta x}} = 2K \int_0^{\infty} \frac{e^{-\theta x} dx}{1 + e^{-2\theta x}}$$

En effectuant le changement de variable : $u = e^{-\theta x}$ ($du = -\theta e^{-\theta x} dx$), on obtient :

$$I_1 = \frac{2K}{\theta} \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{2K}{\theta} [\text{Arctan}u]_0^1 = \frac{2K}{\theta} \frac{\pi}{4}$$

D'où $I_1 = 1$ donne : $K = \frac{2\theta}{\pi}$

1. Du fait que f est paire on a :

$$I_2 = 2K^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(e^{\theta x} + e^{-\theta x})^2} = \frac{8\theta^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\theta x} dx}{(1 + e^{-2\theta x})^2}$$

En effectuant le changement de variable : $u = e^{-\theta x}$ ($du = -\theta e^{-\theta x} dx$), on obtient :

$$I_2 = \frac{8\theta}{\pi^2} \int_0^1 \frac{u du}{(1+u^2)^2}$$

En effectuant le nouveau changement de variable : $u = \tan t$ ($\frac{du}{1+u^2} = dt$), on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{8\theta}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} \frac{\tan t}{1+\tan^2 t} dt = \frac{8\theta}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} \tan t \cos^2 t dt \\ &= \frac{8\theta}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} \sin t \cos t dt = \frac{4\theta}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} \sin 2t dt = \frac{2\theta}{\pi^2} \end{aligned}$$

La condition $I_2 = 1$ donne : $\theta = \frac{\pi^2}{2}$

2

1. Calcul de I_n :

En effectuant le changement de variable : $u = \frac{1-x}{1+x} \left(\frac{-2 dx}{(1+x)^2} = du \right)$, on obtient :

$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 u^n du = \frac{1}{2(n+1)}$$

Calcul de J_n : on peut écrire J_n sous la forme :

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{2n+2} \frac{dx}{(1+x)^2}$$

En effectuant le changement de variable : $u = \frac{1-x}{1+x}$ on a : $x = \frac{1-u}{1+u}$ et $\frac{-2 dx}{(1+x)^2} = du$
d'où :

$$J_n = \frac{1}{8} \int_0^1 (1+u)^2 u^{2n} du = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right)$$

2. On a : $f_n(0) = 1$, $f_n(1) = 0$, et $\forall x \in]0, 1[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. On en déduit que $\forall x$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{pp} 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = 0$$

3. On a : $f_n^2(0) = 1$, $f_n^2(1) = 0$, et $\forall x \in]0, 1[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^2(x) = 0$. On en déduit que $\forall x$, $f_n^2(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{pp} 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^2(x) \right) dx = 0$$

3

1. Dans l'intégrale $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \theta) dx$, en effectuant le changement de variable $u = x - \theta$, on obtient : $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du$. D'autre part, du fait que f est paire on a :

$$I_1 = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx = 2 \left(\int_0^{1/2} \left(6x^2 - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{3}{2} - x \right) dx \right) = 1$$

2. Comme f est paire on a : $I_{2m+1} = 0$ et

$$\begin{aligned} I_{2m} &= 2 \int_0^{\infty} x^{2m} f(x) dx = 2 \left[\int_0^{1/2} x^{2m} \left(6x^2 - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{1/2}^{3/2} x^{2m} \left(\frac{3}{2} - x \right) dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{m}{4^m (1+2m)(3+2m)} + \frac{9^{m+1} - 5 - 4m}{2 \cdot 4^{m+1} (m+1)(1+2m)} \right] \end{aligned}$$

On a : $J_{2m} = I_{2m}$ d'autre part,

$$J_{2m+1} = \int_{-\infty}^0 (-x)^{2m+1} f(x) dx + \int_0^{\infty} x^{2m+1} f(x) dx$$

Dans la première intégrale, en changeant x en $-x$, on obtient :

$$\begin{aligned} J_{2m+1} &= \int_{\infty}^0 x^{2m+1} f(-x) (-dx) + \int_0^{\infty} x^{2m+1} f(x) dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^{2m+1} f(x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^{1/2} x^{2m+1} \left(6x^2 - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{1/2}^{3/2} x^{2m+1} \left(\frac{3}{2} - x \right) dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{2m+1}{4^{m+2} (m+1)(m+2)} + \frac{3 \cdot 9^{m+1} - 4m - 7}{4^{m+2} (m+1)(2m+3)} \right] \end{aligned}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2001-02

Devoir N°2

Exercice 1

Dans cet exercice on admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ et on définit la fonction erf par : $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ avec $erf(1) = 0,8427$.

On considère la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ définie par :

$$f_1(x) = e^{-|x|}$$

$$f_2(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{5}} e^{-|x|}$$

$$f_3(x) = \frac{-3 + 10|x| - 4x^2}{\sqrt{5}} e^{-|x|}$$

1. Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est orthonormée.

2. Soit $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Déterminer $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^3 a_i f_i(x)$ avec $a_i = \langle f_i, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) f(x) dx$.

3. Déterminer $\|\hat{f}\|_2^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$, en déduire $e(f) = \|f - \hat{f}\|_2^2$.

Exercice 2

On considère la suite de fonctions f_n , $n \in \mathbb{N}^*$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 \left(1 + \frac{1}{n} + x \right) & \text{si } -1 - \frac{1}{n} \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ 2 + \frac{1}{n} - x & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq 2 + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence ponctuelle de f_n .
2. Étudier la convergence au sens de L^2 de f_n .

corrigé de devoir N°2

1 On remarque que f_1 , f_2 et f_3 sont paires.

1. On a :

$$\begin{aligned}
 \|f_1\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(x) dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \underbrace{=}_{u=2x} \int_0^{\infty} e^{-u} du = 1 \\
 \|f_2\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(x) dx = \frac{2}{5} \int_0^{\infty} (1 - 2x^2)^2 e^{-2x} dx \\
 &= \underbrace{\frac{1}{5}}_{u=2x} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{2}\right)^2 e^{-u} du = \frac{1 - 2 + 4!/4}{5} = 1 \\
 \|f_3\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_3^2(x) dx = \frac{2}{5} \int_0^{\infty} (-3 + 10x - 4x^2)^2 e^{-2x} dx \\
 &= \underbrace{\frac{1}{5}}_{u=2x} \int_0^{\infty} (-3 + 5u - u^2)^2 e^{-u} du \\
 &= \frac{9 + 25 \times 2 + 4! - 30 + 6 \times 2! - 10 \times 3!}{5} = 1
 \end{aligned}$$

2. Du fait que f est paire on a :

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad a_i = \langle f_i, f \rangle = 2 \int_0^{\infty} f_i(x) f(x) dx$$

D'autre part, on remarque que :

$$e^{-x} e^{-\frac{x^2}{4}} = e^{-\frac{x^2 + 4x}{4}} = e^{-\frac{(x+2)^2}{4} + 1}$$

et en tenant compte de $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ on obtient :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{e}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+2)^2}{4}} dx \\ &\stackrel{u=\frac{x+2}{2}}{=} \frac{2e}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-u^2} du = \frac{2e}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-u^2} du - \int_0^1 e^{-u^2} du \right) \\ &= e(1 - \operatorname{erf}(1)) = 0.4276 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{2\sqrt{5\pi}} \int_0^\infty (1 - 2x^2) e^{-x} e^{-\frac{x^2}{4}} dx \\ &= \frac{2e}{2\sqrt{5\pi}} \int_0^\infty (1 - 2x^2) e^{-\frac{(x+2)^2}{4}} dx \\ &\stackrel{u=\frac{x+2}{2}}{=} \frac{2e}{\sqrt{5\pi}} \int_1^\infty (-8u^2 + 16u - 7) e^{-u^2} du \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int u e^{-u^2} du &= \frac{1}{2} \int (-e^{-u^2})' du = -\frac{e^{-u^2}}{2} + C^te \\ \int u^2 e^{-u^2} du &= \frac{1}{2} \int u (-e^{-u^2})' du = \frac{1}{2} \left(-u e^{-u^2} + \int e^{-u^2} du \right) \end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \int_1^\infty u e^{-u^2} du &= \frac{e^{-1}}{2} \\ \int_1^\infty u^2 e^{-u^2} du &= \frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-u^2} du = \frac{e^{-1}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1 - \operatorname{erf}(1)) \end{aligned}$$

Donc

$$a_2 = \frac{8 + 11e\sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf}(1))}{\sqrt{5\pi}} = -0.0849$$

De même, on trouve :

$$a_3 = \frac{36 + 47 e \sqrt{\pi}(1 - \operatorname{erf}(1))}{\sqrt{5\pi}} = 0.0959$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_2^2 &= \langle \hat{f} | \hat{f} \rangle = \langle a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3, a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \rangle \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0.1992 \end{aligned}$$

On en déduit

$$e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2 = \langle f - \hat{f} | f - \hat{f} \rangle = \langle f, f \rangle - \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|f\|_2^2 - 0.1992$$

Or,

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\stackrel{u=x/\sqrt{2}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} = 0.1995 \end{aligned}$$

d'où $e(\hat{f}) = 0.0003$

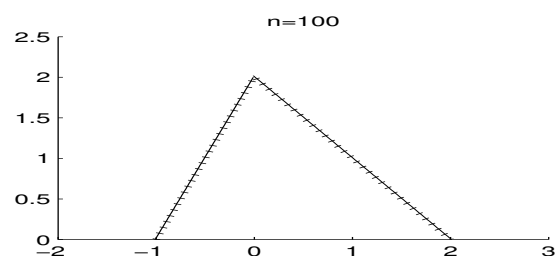
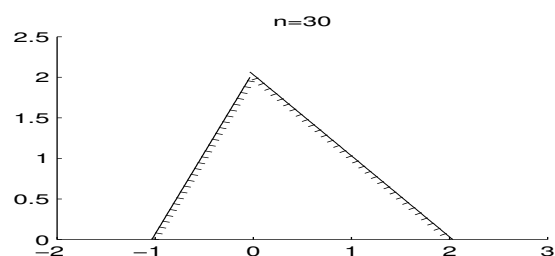
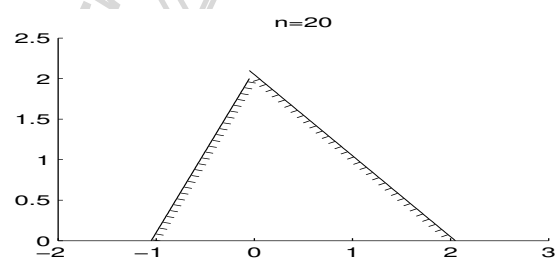
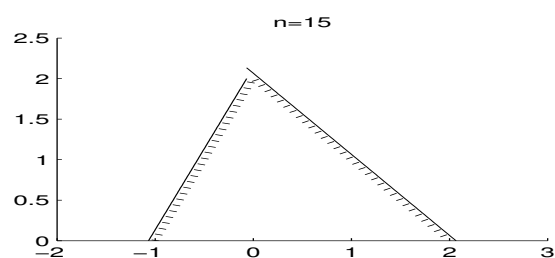
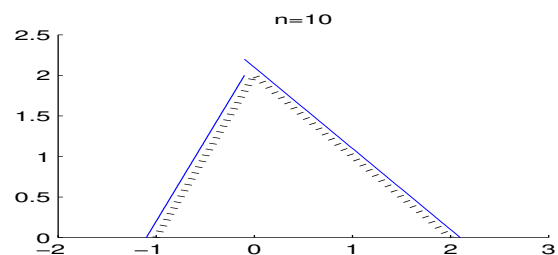
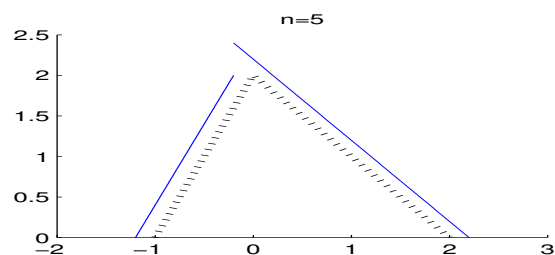
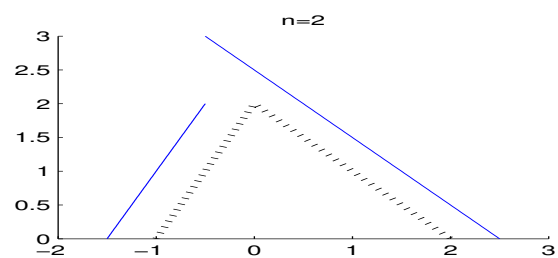
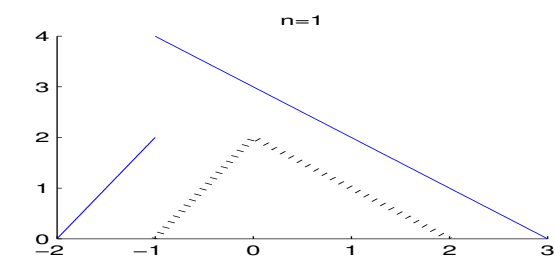
2

1. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n n'est pas continue en $-\frac{1}{n}$; en effet,

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right)^- = 2 \quad \text{et} \quad f_n\left(-\frac{1}{n}\right)^+ = 2 + \frac{2}{n}$$

et d'autre part, $\forall x, f_n(x) \leq 2 + \frac{2}{n}$. On a :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 2(1+x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 2-x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



2. On a :

$$D_n = \|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))^2 dx = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + I_5(n)$$

avec

$$I_1(n) = \int_{-1-1/n}^{-1} f_n^2(x) dx = \frac{4}{3n^3}$$

$$I_2(n) = \int_{-1}^{-1/n} (f_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{4(n-1)}{n^3}$$

$$I_3(n) = \int_{-1/n}^0 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{7}{n^3}$$

$$I_4(n) = \int_0^2 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \frac{2}{n^2}$$

$$I_5(n) = \int_2^{2+1/n} f_n^2(x) dx = \frac{1}{3n^3}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(9n+7)}{3n^3} = 0$$

on en déduit $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f$.

Devoir N°3

Exercice 1

On considère la fonction périodique f de période T définie sur $[-T/2, T/2]$ par : $f(x) = (T - x) \cos(\alpha x)$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$).

1. Déterminer c_n le coefficient complexe de Fourier de f . En déduire a_n et b_n les coefficients de Fourier de f .

2. On suppose $T = 2\pi$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

2.1. Déterminer S_f le développement en série de Fourier de f .

2.2. Calculer la somme : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

2.3. Pour p donné, on désigne par h_p l'harmonique d'ordre p . Combien d'harmoniques faut-il sommer pour que l'on ait une énergie au moins égale à 95% de $E = \int_0^T f^2(x) dx$?

Exercice 2

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F(u) = \frac{u}{(1+u^2)(1+\alpha^2 u^2)}$$

où α est un paramètre.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Déterminer $f * f$.

3. On considère la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par : $g(x) = f(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

Déterminer $g * g$.

corrigé de devoir N°3

1

1. On a :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (T-x) \cos(\alpha x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} dx \\
 &= \frac{1}{T} \left(\underbrace{\int_{-T/2}^0 (T-x) \cos(\alpha x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{T/2} (T-x) \cos(\alpha x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} dx}_{I_2} \right)
 \end{aligned}$$

dans I_1 , en posant : $u = -\frac{2x}{T}$ ($dx = -\frac{T}{2} du$), on obtient :

$$I_1 = \int_1^0 \left(T + \frac{T}{2} u \right) \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) e^{i\pi n u} \left(-\frac{T}{2}\right) du = \frac{T^2}{4} \int_0^1 (2+u) \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) e^{i\pi n u} du$$

dans I_2 , en posant : $u = \frac{2x}{T}$ ($dx = \frac{T}{2} du$), on obtient :

$$I_2 = \int_0^1 \left(T - \frac{T}{2} u \right) \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) e^{-i\pi n u} \left(\frac{T}{2}\right) du = \frac{T^2}{4} \int_0^1 (2-u) \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) e^{-i\pi n u} du$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{T}{4} \int_0^1 \left((2+u) \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) e^{i\pi n u} + (2-u) \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) e^{-i\pi n u} \right) du \\
 &= \frac{T}{4} \left(\underbrace{4 \int_0^1 \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) \cos(\pi n u) du}_{J_1} + 2i \underbrace{\int_0^1 u \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) \sin(\pi n u) du}_{J_2} \right)
 \end{aligned}$$

• pour $n = 0$, on a :

$$c_0 = T \int_0^1 \cos\left(\frac{\alpha T}{2} u\right) du = \frac{2}{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha T}{2}\right)$$

- pour $n \neq 0$, en utilisant :

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} (\cos(A+B) + \cos(A-B)) \quad , \quad \cos A \sin B = \frac{1}{2} (\sin(A+B) - \sin(A-B))$$

On obtient

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\cos\left(\frac{\alpha T u}{2} + n\pi u\right) + \cos\left(\frac{\alpha T u}{2} - n\pi u\right) \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha T}{2} + n\pi\right)}{\frac{\alpha T}{2} + n\pi} + \frac{\sin\left(\frac{\alpha T}{2} - n\pi\right)}{\frac{\alpha T}{2} - n\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}{\frac{\alpha T}{2} + n\pi} + \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}{\frac{\alpha T}{2} - n\pi} \right) \\ &= \frac{(-1)^n \alpha T \sin\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}{2 \left(\frac{\alpha^2 T^2}{4} - n^2 \pi^2 \right)} \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} \int_0^1 u \left(\sin\left(\frac{\alpha T u}{2} + n\pi u\right) + \sin\left(\frac{\alpha T u}{2} - n\pi u\right) \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[-u \left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha T u}{2} + n\pi u\right)}{\frac{\alpha T}{2} + n\pi} + \frac{\cos\left(\frac{\alpha T u}{2} - n\pi u\right)}{\frac{\alpha T}{2} - n\pi} \right) \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha T u}{2} + n\pi u\right)}{\frac{\alpha T}{2} + n\pi} + \frac{\cos\left(\frac{\alpha T u}{2} - n\pi u\right)}{\frac{\alpha T}{2} - n\pi} \right) du \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \alpha T \cos\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}{2 \left(\frac{\alpha^2 T^2}{4} - n^2 \pi^2 \right)} \\ &\quad + \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{\alpha T}{2}\right)}{2} \left(\frac{1}{\left(\frac{\alpha T}{2} + n\pi\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\alpha T}{2} - n\pi\right)^2} \right) \end{aligned}$$

2. Si $T = 2\pi$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a : $c_0 = 4$ et pour $n \neq 0$

$$J_1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)} \quad , \quad J_2 = \frac{4(-1)^n}{\pi^2} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2}$$

d'où

$$c_n = T J_1 + i \frac{T}{2} J_2 = \frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} + i \frac{8(-1)^n}{\pi} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2}$$

2.1. De $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ on déduit :

$$a_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \quad , \quad b_n = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2}$$

On a donc le développement en série de Fourier de f :

$$S_f(x) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

2.2. On remarque que f est continue en 0, d'où

$$f(0) = 2\pi = S_f(0) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{2 - \pi}{4}}$$

2.3. On a :

$$E = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{13}{3} \pi^3 - 2\pi$$

d'où $95\% E = 121.6735$.

et les p premiers harmoniques sont donnés par :

$$h_p = 2\pi(4)^2 + \pi \sum_{n=1}^p (a_n^2 + b_n^2)$$

On a : $h_1 = 148.0216$.

2

1. On écrit F sous la forme : $F(u) = \frac{Au+B}{1+u^2} + \frac{Cu+D}{1+\alpha^2 u^2}$ où A, B, C et D sont déterminés par :

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = A + \frac{C}{\alpha^2} = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(0) = B + D = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(1) = \frac{A+B}{2} + \frac{C+D}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2(1+\alpha^2)} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(2) = \frac{2A+B}{5} + \frac{2C+D}{1+4\alpha^2} = \frac{2}{5(1+4\alpha^2)} & (4) \end{cases}$$

De (1), (2), (3) et (4) on déduit :

$$F(u) = \frac{\alpha^2 u}{(\alpha^2 - 1)(1 + \alpha^2 u^2)} - \frac{u}{(\alpha^2 - 1)(1 + u^2)}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(e^{x-t} + e^{-(x-t)})(e^t + e^{-t})} \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2t}}{(1 + e^{-2x} e^{2t})(1 + e^{2t})} dt \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = e^t$ ($du = e^t dt$) on obtient :

$$\begin{aligned} f * f(x) &= e^{-x} \int_0^{\infty} \frac{u du}{(1 + e^{-2x} u^2)(1 + u^2)} \\ &= e^{-x} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-2x}}{e^{-2x} - 1} \frac{u}{1 + e^{-2x} u^2} - \frac{1}{e^{-2x} - 1} \frac{u}{1 + u^2} \right) du \\ &= \frac{e^{-x}}{2(e^{-2x} - 1)} \left[\ln \left(\frac{1 + e^{-2x} u^2}{1 + u^2} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{-2x e^{-x}}{2(e^{-2x} - 1)} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

3. Pour $x \in [-2, 2]$, on a :

$$g * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \mathbb{I}_{[-1,1]}(x-t) f(t) \mathbb{I}_{[-1,1]}(t) dt$$

Or, $\mathbb{I}_{[-1,1]}(x-t) = \mathbb{I}_{[x-1, x+1]}(t)$, donc

$$g * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t) \mathbb{1}_{[x-1, x+1]}(t) \mathbb{1}_{[-1, 1]}(t) dt$$

En tenant compte de :

$$f(x-t) f(t) = \frac{e^{-x} e^{2t}}{(1 + e^{-2x} e^{2t}) (1 + e^{2t})}$$

$$\mathbb{1}_{[x-1, x+1]}(t) \mathbb{1}_{[-1, 1]}(t) = \mathbb{1}_{[\sup\{-1, x-1\}, \inf\{1, x+1\}]}(t)$$

On obtient :

$$g * g(x) = \int_{\sup\{-1, x-1\}}^{\inf\{1, x+1\}} \frac{e^{-x} e^{2t} dt}{(1 + e^{-2x} e^{2t}) (1 + e^{2t})}$$

Considérons deux cas : $x \in [-2, 0]$ et $x \in [0, 2]$.

- si $x \in [-2, 0]$ on a : $\sup\{-1, x-1\} = -1$ et $\inf\{1, x+1\} = x+1$, d'où :

$$g * g(x) = \int_{-1}^{x+1} \frac{e^{-x} e^{2t} dt}{(1 + e^{-2x} e^{2t}) (1 + e^{2t})}$$

En effectuant le changement de variable $u = e^t$ ($du = e^t dt$) on obtient :

$$\begin{aligned} g * g(x) &= e^{-x} \int_{e^{-1}}^{e^{x+1}} \frac{u du}{(1 + e^{-2x} u^2) (1 + u^2)} \\ &= e^{-x} \int_{e^{-1}}^{e^{x+1}} \left(\frac{e^{-2x}}{e^{-2x} - 1} \frac{u}{1 + e^{-2x} u^2} - \frac{1}{e^{-2x} - 1} \frac{u}{1 + u^2} \right) du \\ &= \frac{e^{-x}}{2(e^{-2x} - 1)} \left[\ln \left(\frac{1 + e^{-2x} u^2}{1 + u^2} \right) \right]_{e^{-1}}^{e^{x+1}} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x} - 1} \ln \left(\frac{e^{-1} + e^1}{e^{-x-1} + e^{x+1}} \right) \end{aligned}$$

- si $x \in [0, 2]$ on a : $\sup\{-1, x-1\} = x-1$ et $\inf\{1, x+1\} = 1$, d'où :

$$g * g(x) = \int_{x-1}^1 \frac{e^{-x} e^{2t} dt}{(1 + e^{-2x} e^{2t}) (1 + e^{2t})}$$

En effectuant le changement de variable $u = e^t$ ($du = e^t dt$) on obtient :

$$\begin{aligned}
 g * g(x) &= e^{-x} \int_{e^{x-1}}^{e^1} \frac{u du}{(1 + e^{-2x} u^2)(1 + u^2)} \\
 &= e^{-x} \int_{e^{x-1}}^{e^1} \left(\frac{e^{-2x}}{e^{-2x} - 1} \frac{u}{1 + e^{-2x} u^2} - \frac{1}{e^{-2x} - 1} \frac{u}{1 + u^2} \right) du \\
 &= \frac{e^{-x}}{2(e^{-2x} - 1)} \left[\ln \left(\frac{1 + e^{-2x} u^2}{1 + u^2} \right) \right]_{e^{x-1}}^{e^1} \\
 &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x} - 1} \ln \left(\frac{e^{x-1} + e^{-x+1}}{e^{-1} + e^1} \right)
 \end{aligned}$$

Devoir N°4

Exercice 1

On considère la fonction $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ et l'autocorrélation temporelle K_f définie par : $K_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(\tau + x) dx$.

On définit la fonction g_θ par :

$$g_\theta(x) = \frac{f(x + \theta) - f(x - \theta)}{2\theta}$$

où θ est un paramètre.

1. Exprimer G_θ la transformée de Fourier de g_θ en fonction de $\mathcal{F}(f)$.
2. Déterminer la densité spectrale d'énergie de g_θ .
3. Pour tout ν , déterminer $G(\nu) = \lim_{\theta \rightarrow 0} G_\theta(\nu)$.
4. Pour tout ν , comparer $G(\nu)$ et $\mathcal{F}(f')(\nu)$.
5. Exprimer Ψ_θ l'autocorrélation temporelle de g_θ en fonction de K_f .
6. Pour tout τ , déterminer $\lim_{\theta \rightarrow 0} \Psi_\theta(\tau)$.
7. **Application** $f(x) = x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = e^{\lambda x} \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-\mu x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$$

où λ et μ sont des paramètres strictement positifs.

1. Déterminer $K_{f,g}$ l'intercorrélation temporelle de f et g définie par :

$$K_{f,g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(\tau + x) dx$$

2. Déterminer $K_{g,f}$ l'intercorrélation temporelle de g et f définie par :

$$K_{g,f}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(\tau + x) dx$$

corrigé de devoir N°4

1

1. On a :

$$\begin{aligned}
G_\theta(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\theta(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{1}{2\theta} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+\theta) - f(x-\theta)) e^{-2i\pi\nu x} dx \\
&= \frac{1}{2\theta} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\theta) e^{-2i\pi\nu x} dx}_{t=x+\theta} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\theta) e^{-2i\pi\nu x} dx}_{t=x-\theta} \right) \\
&= \frac{1}{2\theta} \left(e^{2i\pi\nu\theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - e^{-2i\pi\nu\theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \right) \\
&= \frac{e^{2i\pi\nu\theta} - e^{-2i\pi\nu\theta}}{2\theta} \mathcal{F}(f)(\nu) = i \frac{\sin 2\pi\nu\theta}{\theta} \mathcal{F}(f)(\nu)
\end{aligned}$$

2. La densité spectrale d'énergie de g_θ est définie par :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}(g_\theta)(\nu)|^2 &= \left(i \frac{\sin 2\pi\nu\theta}{\theta} \mathcal{F}(f)(\nu) \right) \left(-i \frac{\sin 2\pi\nu\theta}{\theta} \mathcal{F}(f)(\nu) \right) \\
&= \left(\frac{\sin 2\pi\nu\theta}{\theta} \right)^2 |\mathcal{F}(f)(\nu)|^2
\end{aligned}$$

3. Pour tout ν on a :

$$G(\nu) = \lim_{\theta \rightarrow 0} G_\theta(\nu) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2\pi\nu\theta}{2\pi\nu\theta} \right) 2i\pi\nu \mathcal{F}(f)(\nu) = 2i\pi\nu \mathcal{F}(f)(\nu)$$

4. Si f est continue, pour tout ν on a : $G(\nu) = \mathcal{F}(f')(\nu)$.

5. On a :

$$\begin{aligned} \Psi_\theta(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_\theta(x) g_\theta(\tau + x) dx \\ &= \frac{1}{4\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x + \theta) - f(x - \theta)) (f(\tau + x + \theta) - f(\tau + x - \theta)) dx \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \theta) f(\tau + x + \theta) dx &\stackrel{u=x+\theta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(\tau + u) du = K_f(\tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \theta) f(\tau + x - \theta) dx &\stackrel{u=x+\theta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(\tau - 2\theta + u) du = K_f(\tau - 2\theta) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \theta) f(\tau + x + \theta) dx &\stackrel{u=x-\theta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(\tau + 2\theta + u) du = K_f(\tau + 2\theta) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \theta) f(\tau + x - \theta) dx &\stackrel{u=x-\theta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(\tau + u) du = K_f(\tau) \end{aligned}$$

D'où

$$\Psi_\theta(\tau) = \frac{2K_f(\tau) - K_f(\tau - 2\theta) - K_f(\tau + 2\theta)}{4\theta^2}$$

6. En utilisant le développement de Taylor, à l'ordre 2 au voisinage de $\theta = 0$, des fonctions $K_f(\tau - 2\theta)$ et $K_f(\tau + 2\theta)$, on a :

$$K_f(\tau - 2\theta) = K_f(\tau) - 2\theta K'_f(\tau) + 2\theta^2 K''_f(\tau) + \theta^2 \varepsilon(\theta)$$

$$K_f(\tau + 2\theta) = K_f(\tau) + 2\theta K'_f(\tau) + 2\theta^2 K''_f(\tau) + \theta^2 \varepsilon(\theta)$$

Il vient donc,

$$K_f(\tau - 2\theta) + K_f(\tau + 2\theta) = 2 K_f(\tau) + 4\theta^2 K''_f(\tau) + \theta^2 \varepsilon(\theta)$$

On en déduit, pour tout τ ,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \Psi_\theta(\tau) = K''_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f''(\tau + x) dx = K_{f,f''}(\tau)$$

où $K_{f,f''}$ désigne l'intercorrélation temporelle de f et f'' .

7. On a :

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = i \left(\frac{\cos 2\pi\nu}{\pi\nu} - \frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} \right)$$

D'où

$$G_\theta(\nu) = \frac{\sin 2\pi\nu\theta}{\theta} \left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} - \frac{\cos 2\pi\nu}{\pi\nu} \right)$$

On en déduit la densité spectrale d'énergie de g_θ :

$$|\mathcal{F}(g_\theta)(\nu)|^2 = \left(\frac{\sin 2\pi\nu\theta}{\theta} \right)^2 \left(\frac{\cos 2\pi\nu}{\pi\nu} - \frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} \right)^2$$

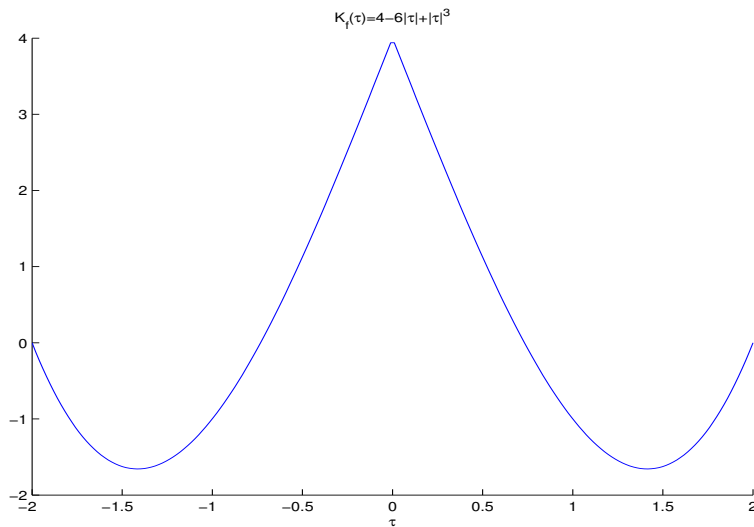
Pour tout ν , on a :

$$G(\nu) = -2\pi\nu \left(\frac{\cos 2\pi\nu}{\pi\nu} - \frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi^2\nu^2} \right) = \frac{\sin 2\pi\nu}{\pi\nu} - 2 \cos 2\pi\nu$$

On remarque que $G(\nu) \neq \mathcal{F}(f')(\nu)$; en effet, f n'est pas continue aux points $x = -1$ et $x = 1$.

On a : $\forall \tau \in [-2, 2]$

$$\begin{aligned} K_f(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(x + \tau) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x + \tau) dx = \int_{\sup\{-1, -1-\tau\}}^{\inf\{1, 1-\tau\}} x(x + \tau) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \tau \frac{x^2}{2} \right]_{\sup\{-1, -1-\tau\}}^{\inf\{1, 1-\tau\}} = 4 - 6|\tau| + |\tau|^3 \end{aligned}$$



Du fait que $\forall x, f''(x) = 0$, on a : $\forall \tau, \lim_{\theta \rightarrow 0} \Psi_\theta(\tau) = 0$.

2

1. Pour $\tau \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 K_{f,g}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - \mu(\tau+x)} \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(x) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(\tau+x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x - \mu(\tau+x)} \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(x) \mathbb{1}_{[-\tau, \infty[}(x) dx = \int_{-\tau}^0 e^{\lambda x - \mu(\tau+x)} dx \\
 &= \begin{cases} \tau e^{-\lambda\tau} & \text{si } \lambda = \mu \\ \frac{e^{-\mu\tau} - e^{-\lambda\tau}}{\lambda - \mu} & \text{si } \lambda \neq \mu \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Pour $\tau \leq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
 K_{g,f}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x + \lambda(\tau+x)} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(\tau+x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x + \lambda(\tau+x)} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \mathbb{1}_{]-\infty,-\tau]}(x) dx = \int_0^{-\tau} e^{-\mu x + \lambda(\tau+x)} dx \\
 &= \begin{cases} -\tau e^{\lambda\tau} & \text{si } \lambda = \mu \\ \frac{e^{\mu\tau} - e^{\lambda\tau}}{\lambda - \mu} & \text{si } \lambda \neq \mu \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2001-02

Devoir N°5

Exercice 1

1. Soit f une fonction réelle admettant la transformée de Laplace F . Pour $x > 0$, on pose : $f_1(x) = x f'(x)$. Exprimer F_1 la transformée de Laplace de f_1 en fonction de F .
2. Déterminer la fonction g si sa transformée de Laplace est donnée par :

$$G(p) = \frac{p^2}{(p + \lambda)^4} \quad (\lambda > 0)$$

3. On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} t x'(t) = -x(t) - y(t) + g(t) \\ y'(t) = \lambda x(t) - \lambda y(t) \end{cases} \quad (\mathbf{E})$$

avec $\lambda > 0$ et les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$.

- 3.1. En utilisant la transformée de Laplace résoudre le système $\mathbf{E}$.
- 3.2. Montrer qu'il existe une fonction z telle que l'on ait : $y = x * z$.

Exercice 2

On considère la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} x|x-3| & \text{si } 0 \leq x < 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer $[f_0]'$, $[f_0]''$ et $[f_0]'''$.
2. Déterminer la transformée de Fourier de f_0 .
3. Soit f une fonction périodique de période $T = 6$, égale à f_0 sur $[0, 6]$. Déterminer le développement en série de Fourier de f .

corrigé de devoir N°5

1

1. On a :

$$F_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(x) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} x f'(x) e^{-px} dx$$

en effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} x e^{-px} = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \iff \begin{cases} du = (1 - px) e^{-px} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

on obtient :

$$F_1(p) = \underbrace{[x f(x) e^{-px}]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} (1 - px) f(x) e^{-px} dx = -F(p) - p F'(p)$$

2. On décompose G en éléments simples :

$$G(p) = \frac{A_1}{(p + \lambda)^4} + \frac{A_2}{(p + \lambda)^3} + \frac{A_3}{(p + \lambda)^2} + \frac{A_4}{p + \lambda}$$

soit

$$G(p) = \frac{\lambda^2}{(p + \lambda)^4} - \frac{2\lambda}{(p + \lambda)^3} + \frac{1}{(p + \lambda)^2}$$

On en déduit : $\forall t > 0$

$$g(t) = \lambda^2 \frac{t^3 e^{-\lambda t}}{3!} - 2\lambda \frac{t^2 e^{-\lambda t}}{2!} + t e^{-\lambda t} = \frac{t(\lambda^2 t^2 - 6\lambda t + 6)}{6} e^{-\lambda t}$$

3.1. Noton : X et Y les transformées de Laplace de x et y . En prenant la transformée de Laplace du système **(E)** on obtient :

$$\begin{cases} -X(p) - p X'(p) = -X(p) - Y(p) + G(p) \\ p Y(p) - y(0) = \lambda X(p) - \lambda Y(p) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} p X'(p) = Y(p) - G(p) & (1) \\ Y(p) = \frac{\lambda}{p + \lambda} X(p) & (2) \end{cases}$$

En emportant **(2)** dans **(1)**, on obtient :

$$p X'(p) = \frac{\lambda}{p + \lambda} X(p) - G(p) \quad (3)$$

La solution (sans second membre) de **(3)** : $X'(p) = \frac{\lambda}{p(p + \lambda)} X(p)$ est :

$$X(p) = C \left(\frac{p}{p + \lambda} \right) \quad (4)$$

En faisant varier la constante, on obtient :

$$X'(p) = C'(p) \left(\frac{p}{p + \lambda} \right) + C(p) \left(\frac{\lambda}{(p + \lambda)^2} \right) \quad (4')$$

En emportant **(4')** dans **(3)**, on obtient :

$$C'(p) = -\frac{p + \lambda}{p^2} G(p) = -\frac{1}{(p + \lambda)^3}$$

D'où $C(p) = \frac{1}{2(p + \lambda)^2}$. On en déduit :

$$X(p) = \frac{p}{2(p + \lambda)^3} \quad (5)$$

On a :

$$X(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p + \lambda)^2} - \frac{\lambda}{(p + \lambda)^3} \right)$$

On en déduit l'expression de x :

$$x(t) = \frac{1}{4} t(2 - \lambda t) e^{-\lambda t}$$

En emportant (5) dans (2), on obtient :

$$Y(p) = \frac{\lambda p}{2(p+\lambda)^3} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{(p+\lambda)^3} - \frac{\lambda}{(p+\lambda)^4} \right)$$

On en déduit l'expression de y :

$$y(t) = \frac{\lambda}{12} t^2 (3 - \lambda t) e^{-\lambda t}$$

3.2. D'après (2), on a : $Y(p) = Z(p) X(p)$ (Z désignant la transformée de Laplace de z).

De $Z(p) = \frac{\lambda}{p+\lambda}$ on déduit : $z(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

2

L'expression de f_0 s'écrit sous la forme :

$$f_0(x) = \begin{cases} x(x-3) & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x(3-x) & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit :

$$f'_0(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 3-2x & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f''_0(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\forall x, f'''_0(x) = 0$.

On remarque f_0 n'est pas continue au point $x = 6$, et on a : $f_0(6^-) = -18$, $f_0(6^+) = 0$, d'où $\Delta f_0(6) = 18$. Il vient donc :

$$[f_0]' = [f'_0] + 18 \delta_{\{6\}}$$

On remarque f'_0 n'est pas continue aux points $x = 0$, $x = 3$ et $x = 6$ et on a :

$$\begin{aligned} f'_0(0^-) &= 0, & f'_0(0^+) &= -3, & \Delta f'_0(0) &= -3 \\ f'_0(3^-) &= 3, & f'_0(3^+) &= -3, & \Delta f'_0(3) &= -6 \\ f'_0(6^-) &= -9, & f'_0(6^+) &= 0, & \Delta f'_0(6) &= 9 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$[f_0]'' = [f''_0] + 18 \delta'_{\{6\}} - 3\delta - 6\delta_{\{3\}} + 9\delta_{\{6\}}$$

On remarque f_0'' n'est pas continue aux points $x = 0, x = 3$ et $x = 6$ et on a :

$$\begin{aligned} f_0'''(0^-) &= 0, & f_0'''(0^+) &= 2, & \Delta f_0''(0) &= 2 \\ f_0'''(3^-) &= 2, & f_0'''(3^+) &= -2, & \Delta f_0''(3) &= -4 \\ f_0'''(6^-) &= -2, & f_0'''(6^+) &= 0, & \Delta f_0''(6) &= 2 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$[f_0]''' = 18 \delta_{\{6\}}'' - 3\delta' - 6 \delta_{\{3\}}' + 9 \delta_{\{6\}}' + 2\delta - 4 \delta_{\{3\}} + 2 \delta_{\{6\}} \quad (\star)$$

2. D'après le cours, pour toute distribution T , on a :

$$\mathcal{F}(T^{(m)})(\nu) = (2i\pi\nu)^m \mathcal{F}(T)(\nu)$$

D'autre part, on sait que : $\mathcal{F}(\delta_{\{\theta\}})(\nu) = e^{-2i\pi\theta\nu}$ on en déduit :

$$\mathcal{F}(\delta_{\{\theta\}}^{(m)})(\nu) = (2i\pi\nu)^m e^{-2i\pi\theta\nu}$$

De $(\star)$ on déduit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([f_0]''')(\nu) &= (2i\pi\nu)^3 \mathcal{F}(f_0)(\nu) \\ &= 18(2i\pi\nu)^2 e^{-12i\pi\nu} - 3(2i\pi\nu) - 6(2i\pi\nu) e^{-6i\pi\nu} + 9(2i\pi\nu) e^{-12i\pi\nu} \\ &\quad + 2 - 4 e^{-6i\pi\nu} + 2 e^{-12i\pi\nu} \\ &= 2(1 - 3i\pi\nu) - 4(1 + 3i\pi\nu) e^{-6i\pi\nu} + 2(1 - 36\pi^2\nu^2 + 9i\pi\nu) e^{-12i\pi\nu} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathcal{F}(f_0)(\nu) = \frac{3\pi\nu + i}{4\pi^3\nu^3} + \frac{3\pi\nu - i}{2\pi^3\nu^3} e^{-6i\pi\nu} + \frac{9\pi\nu + 36i\pi^2\nu^2 - i}{4\pi^3\nu^3} e^{-12i\pi\nu}$$

3. D'après le *théorème 5.31* de cours, les coefficients de Fourier complexes de f sont définis par :

$$c_n = \frac{1}{T} \mathcal{F}(f_0) \left(\frac{n}{T} \right) = \frac{1}{6} \mathcal{F}(f_0) \left(\frac{n}{6} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

D'où

$$\begin{cases} c_0 = \frac{9}{2} \\ \forall n \in \mathbb{Z}^*, c_n = \frac{18 + 9(-1)^n}{\pi^2 n^2} + i \frac{9 - 18(-1)^n - 9 + 9\pi^2 n^2}{\pi^3 n^3} \end{cases}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2002-03

Devoir N°1

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{K x}{(1 + x^2)^{\theta+1}}$$

où $\theta > 0$ et K est une constante.

1. Exprimer K en fonction de θ de sorte que $\int_0^\infty f(x) dx = 1$
2. Pour quelle valeur de θ a-t-on $\int_0^\infty x f^2(x) dx = \frac{1}{3}$?

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_0^1 \sin n\pi x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

Exprimer I_n en fonction de n .

Exercice 3

On considère la suite de fonctions f_n définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{x^2 + nx + \frac{n^2+n}{4}} & \text{si } -n \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x et pour tout n , $f_n(x) \geq 0$.

2. On note : $I_n = \int_{-n}^n f_n(x) dx$.

Exprimer I_n en fonction de n et en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - |x|) & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose : $h(x) = \sup \{f(x), g(x)\}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

2. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$.

Mathématique du Signal Déterministe

Année 2002-03

corrigé de devoir N°1

1

1. On a : $\int_0^\infty f(x) dx = K \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^{\theta+1}}.$

En effectuant le changement de variable $u = 1 + x^2$ ($du = 2x dx$), on obtient

$$\int_0^\infty f(x) dx = K \int_1^\infty \frac{du}{u^{\theta+1}} = \frac{K}{2\theta}$$

D'où $K = 2\theta$

2. On a : $\int_0^\infty x f^2(x) dx = 4\theta^2 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{2\theta+2}}.$

En effectuant le changement de variable $u = 1 + x^2$ ($du = 2x dx$), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x f^2(x) dx &= 2\theta^2 \int_1^\infty \frac{(u-1) du}{u^{2\theta+2}} = 2\theta^2 \int_1^\infty \left(\frac{1}{u^{2\theta+1}} - \frac{1}{u^{2\theta+2}} \right) du \\ &= 2\theta^2 \left(\frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2\theta+1} \right) = \frac{\theta}{2\theta+1} \end{aligned}$$

On a donc $\frac{\theta}{2\theta+1} = \frac{1}{3}$ soit $\theta = 1$

2

On remarque que $I_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, en utilisant l'identité :

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} (\sin(A + B) + \sin(A - B))$$

on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin\left(\frac{3n\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3n\pi} \cos\left(\frac{3n\pi x}{2}\right) - \frac{2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3n\pi} - \frac{1}{3n\pi} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Distinguons quatre cas, pour $k \geq 1$

- si $n = 4k - 3$ on a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ d'où $I_{4k-3} = \frac{4}{3(4k-3)\pi}$
- si $n = 4k - 2$ on a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ d'où $I_{4k-2} = \frac{4}{3(4k-2)\pi}$
- si $n = 4k - 1$ on a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ d'où $I_{4k-1} = \frac{4}{3(4k-1)\pi}$
- si $n = 4k$ on a : $\begin{cases} \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = \cos(6k\pi) = 1 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos(2k\pi) = 1 \end{cases}$ d'où $I_{4k} = 0$

3

1. Pour tout n on a: $f_n(-n) = f_n(0) = \frac{4}{\sqrt{n}(n+1)}$ et $f_n(n) = \frac{4}{\sqrt{n}(9n+1)}$.

D'autre part,

$$f'_n(x) = \frac{-16\sqrt{n}(2x+n)}{(4x^2+4nx+n^2+n)^2}$$

$$f''_n(x) = \frac{32\sqrt{n}(12x^2+12nx+3n^2-n)}{(4x^2+4nx+n^2+n)^3}$$

donc $f'_n(x) = 0$ pour $x = -\frac{n}{2}$ avec $f_n(-\frac{n}{2}) = \frac{4}{\sqrt{n}}$ et $f''_n(-\frac{n}{2}) = -\frac{32}{n^{3/2}}$.

On en déduit que le point $x = -\frac{n}{2}$ réalise le maximum de f_n et donc $f_n(x) \geq 0$ pour tout n et $-n \leq x \leq n$.

2. On remarque :

$$\begin{aligned} x^2 + nx + \frac{n^2+n}{4} &= \frac{1}{4} (4x^2 + 4nx + n^2 + 2) = \frac{1}{4} [(2x+n)^2 + n] \\ &= \frac{n}{4} \left[\left(\frac{2x+n}{\sqrt{n}} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\text{Il vient donc : } I_n = \frac{4}{\sqrt{n}} \int_{-n}^n \frac{dx}{\left(\frac{2x+n}{\sqrt{n}} \right)^2 + 1}$$

En effectuant le changement de variable : $u = \frac{2x+n}{\sqrt{n}}$ ($du = \frac{2dx}{\sqrt{n}}$) on obtient

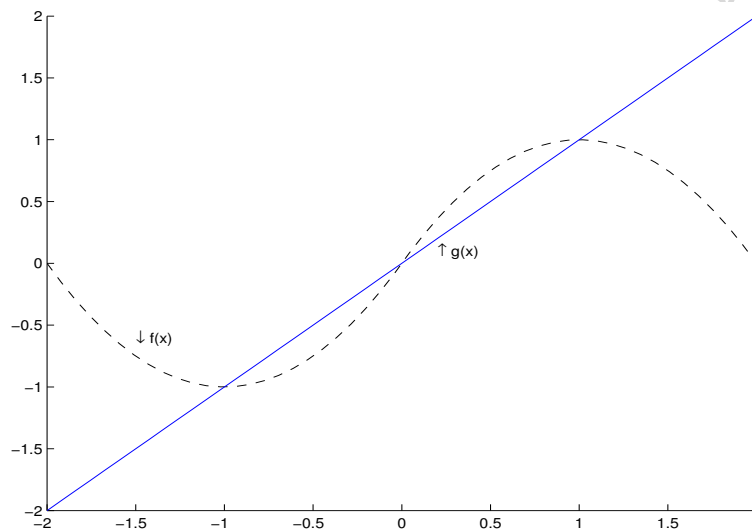
$$I_n = 2 \int_{-\sqrt{n}}^{3\sqrt{n}} \frac{du}{1+u^2} = 2 (\text{Arctan}(3\sqrt{n}) + \text{Arctan}(\sqrt{n}))$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2\pi$.

4 1. on a :

- si $x \leq -2$, $F(x) = 0$
- si $-2 \leq x \leq 0$, $F(x) = \int_{-2}^x t(t+2) dt = \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{4}{3}$
- si $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = \int_{-2}^0 t(t+2) dt + \int_0^x t(2-t) dt = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{4}{3}$
- si $x \geq 2$, $F(x) = 0$

2. Pour la représentation graphique de f et g on a la figure suivante :



On en déduit l'expression de h :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ g(x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ g(x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} x(2+x) & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x(2-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

D'où $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1$

Devoir N°2

Exercice 1

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par :

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \alpha x(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \\f_2(x) &= \beta \left(x - \frac{2}{5}\right)(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \\f_3(x) &= \gamma \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{15}\right)(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\end{aligned}$$

où $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ sont des constantes.

1. Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est orthogonale.
2. Déterminer (α, β, γ) de sorte que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ soit orthonormée.
3. Soit $f(x) = \cos(\pi x/2)$.

Déterminer $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^3 a_i f_i(x)$ avec $a_i = \langle f_i, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) f(x) dx$.

4. Déterminer $\|\hat{f}\|_2^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$, en déduire $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2$.

Exercice 2

Pour $n \geq 1$ on considère la suite de fonctions f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+\frac{1}{n}}}{2(1+\frac{1}{n})} & \text{si } x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{2(1+\frac{1}{n})} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{e^{-x+\frac{1}{n}}}{2(1+\frac{1}{n})} & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$ ne dépend pas de n .
2. Montrer que pour tout n , $f_n \in L^2(\mathbb{R})$.
3. Étudier la convergence ponctuelle de f_n .
4. f_n converge-t-elle au sens de L^2 vers la fonction $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$?

Mathématique du Signal Déterministe

Année 2002-03

corrigé de devoir N°2

1

1. Pour $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ et $i \neq j$ on a :

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx = 0$$

ce qui montre que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est orthogonale.

2. On a :

$$\|f_1\|_2^2 = \langle f_1, f_1 \rangle = \int_0^1 f_1^2(x) dx = \frac{\alpha^2}{30}$$

d'où $\alpha = \sqrt{30}$

$$\|f_2\|_2^2 = \langle f_2, f_2 \rangle = \int_0^1 f_2^2(x) dx = \frac{\beta^2}{50}$$

d'où $\beta = \sqrt{50}$

$$\|f_3\|_2^2 = \langle f_3, f_3 \rangle = \int_0^1 f_3^2(x) dx = \frac{\gamma^2}{1575}$$

d'où $\gamma = \sqrt{1575} = 15\sqrt{7}$

3. On a :

$$a_1 = \langle f_1, f \rangle = \int_0^1 f_1(x) f(x) dx = \frac{4\sqrt{30}(\pi - 4)}{\pi^3}$$

$$a_2 = \langle f_2, f \rangle = \int_0^1 f_2(x) f(x) dx = \frac{4\sqrt{2}(20 - 7\pi)}{\pi^3}$$

$$a_3 = \langle f_3, f \rangle = \int_0^1 f_3(x) f(x) dx = \frac{4\sqrt{7}(11\pi^2 + 80\pi - 360)}{\pi^4}$$

On en déduit :

$$\hat{f}(x) = \frac{60}{\pi^4} [(77\pi^2 + 560\pi - 2520)x^2 + (1680 - 352\pi - 58\pi^2)x + 7\pi^2 + 32\pi - 168] (1 - x)$$

4. On a :

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \sum_{i=1}^3 a_i^2 = \frac{240(60480 - 26880\pi - 624\pi^2 + 768\pi^3 + 65\pi^4)}{\pi^8}$$

D'autre part, $e(\hat{f}) = \|f\|_2^2 - \|\hat{f}\|_2^2$ avec

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$$

D'où $e(\hat{f}) = 0.106595 \cdot 10^{-5}$

2

1. on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx &= \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} e^{x + \frac{1}{n}} dx}_{u=x + \frac{1}{n}} \\
 &\quad + \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx + \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-x + \frac{1}{n}} dx}_{u=-x + \frac{1}{n}} \\
 &= \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} + \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} = 1
 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx &= \frac{1}{4(1 + \frac{1}{n})^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} e^{2x + \frac{2}{n}} dx}_{u=2x + \frac{2}{n}} \\
 &\quad + \frac{1}{4(1 + \frac{1}{n})^2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx + \frac{1}{4(1 + \frac{1}{n})^2} \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-2x + \frac{2}{n}} dx}_{u=-2x + \frac{2}{n}} \\
 &= \frac{1}{8(1 + \frac{1}{n})^2} + \frac{\frac{1}{n}}{2(1 + \frac{1}{n})^2} + \frac{1}{8(1 + \frac{1}{n})^2} = \frac{n^2 + 2n}{4(n + 1)^2}
 \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx = \frac{1}{4}$$

3. On a : $f_n(0) = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})}$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \frac{1}{2}$.

Pour $x < 0$, on a : $f_n(x) = \frac{e^{x+\frac{1}{n}}}{2(1 + \frac{1}{n})}$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{e^x}{2}$.

Pour $x > 0$, on a : $f_n(x) = \frac{e^{-x+\frac{1}{n}}}{2(1 + \frac{1}{n})}$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{e^{-x}}{2}$.

On en déduit que : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

4. On a :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{e^{x+\frac{1}{n}}}{2(1 + \frac{1}{n})} - \frac{e^x}{2} \right)^2 dx + \int_{-\frac{1}{n}}^0 \left(\frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} - \frac{e^x}{2} \right)^2 dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} - \frac{e^{-x}}{2} \right)^2 dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \left(\frac{e^{-x+\frac{1}{n}}}{2(1 + \frac{1}{n})} - \frac{e^{-x}}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{e^{\frac{4}{n}} - 2(1 + \frac{1}{n})e^{\frac{3}{n}} + (1 + \frac{1}{n})^2 e^{\frac{2}{n}} - 5 + \frac{2}{n}}{8(1 + \frac{1}{n})^2} \\ &\quad + \frac{-2(1 + \frac{1}{n})^2 e^{-\frac{2}{n}} + 6(1 + \frac{1}{n})e^{-\frac{1}{n}}}{8(1 + \frac{1}{n})^2} \end{aligned}$$

On en déduit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$

Devoir N°3

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[-2,0]}(x) + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \mathbb{1}_{[0,3]}(x)$$

$$g(x) = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{x}{3}\right) \mathbb{1}_{[-3,0]}(x) + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{x}{2}\right) \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$$

1. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$.
2. Déterminer $f * f$. En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} f * f(x) dx$
3. Déterminer $g * g$. En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} g * g(x) dx$
4. Déterminer $f * g$. En déduire $\int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) dx$

Exercice 2

On considère les fonctions f_0 et g_0 définies par :

$$f_0(x) = \begin{cases} x \cos 2\pi x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad g_0(x) = \begin{cases} x \sin 2\pi x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx$ et $E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_0^2(x) dx$.
2. Soit f un signal périodique de période $T = 1$, égal à f_0 sur $[0, 1]$.
 - 2.1. Calculer $f(0^-)$, $f(0^+)$, $f(1^-)$, $f(1^+)$. En déduire $f(0)$ et $f(1)$
 - 2.2. Déterminer S_f la série de Fourier de f .
3. Soit g un signal périodique de période $T = 1$, égal à g_0 sur $[0, 1]$.
 - 3.1. Calculer $g(0^-)$, $g(0^+)$, $g(1^-)$, $g(1^+)$. En déduire $g(0)$ et $g(1)$
 - 3.2. Déterminer S_g la série de Fourier de g .
4. En utilisant la relation de Parseval, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2}$$

Mathématique du Signal Déterministe

Année 2002-03

corrigé de devoir N°3

1

On peut écrire f et g sous la forme :

$$f(x) = f_1(x) \mathbb{1}_{[-2,0]}(x) + f_2(x) \mathbb{1}_{[0,3]}(x) \quad , \quad g(x) = g_1(x) \mathbb{1}_{[-3,0]}(x) + g_2(x) \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$$

1. On a : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ et $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$

2. Pour $x \in [-4, 6]$, on a : $f * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) f(t) dt$. Or,

$$\begin{aligned} f(x-t) f(t) &= f_1(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[-2,0]}(t) \mathbb{1}_{[x,x+2]}(t) + f_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[-2,0]}(t) \mathbb{1}_{[x-3,x]}(t) \\ &\quad + f_2(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[0,3]}(t) \mathbb{1}_{[x,x+2]}(t) + f_2(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[0,3]}(t) \mathbb{1}_{[x-3,x]}(t) \end{aligned}$$

On découpe l'intervalle $[-4, 6]$ en cinq sous intervalles

$$[-4, -2], [-2, 0], [0, 1], [1, 3], [3, 6]$$

d'où le tableau suivant :

x	$[-2, 0] \cap [x, x+2]$	$[-2, 0] \cap [x-3, x]$	$[0, 3] \cap [x, x+2]$	$[0, 3] \cap [x-3, x]$
$[-4, -2]$	$[-2, x+2]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$[-2, 0]$	$[x, 0]$	$[-2, x]$	$[0, x+2]$	$\emptyset$
$[0, 1]$	$\emptyset$	$[-2, 0]$	$[x, x+2]$	$[0, x]$
$[1, 3]$	$\emptyset$	$[x-3, 0]$	$[x, 3]$	$[0, x]$
$[3, 6]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[x-3, 3]$

Il vient donc

x	$f(x-t)f(t)$
$[-4, -2]$	$f_1(t)f_1(t-x)\mathbb{1}_{[-2, x+2]}(t)$
$[-2, 0]$	$f_1(t)f_1(t-x)\mathbb{1}_{[x, 0]}(t) + f_1(t)f_2(t-x)\mathbb{1}_{[-2, x]}(t) + f_2(t)f_1(t-x)\mathbb{1}_{[0, x+2]}(t)$
$[0, 1]$	$f_1(t)f_2(x-t)\mathbb{1}_{[-2, 0]}(t) + f_2(t)f_1(x-t)\mathbb{1}_{[x, x+2]}(t) + f_2(t)f_2(x-t)\mathbb{1}_{[0, x]}(t)$
$[1, 3]$	$f_1(t)f_2(x-t)\mathbb{1}_{[x-3, 0]}(t) + f_2(t)f_1(x-t)\mathbb{1}_{[x, 3]}(t) + f_2(t)f_2(x-t)\mathbb{1}_{[0, x]}(t)$
$[3, 6]$	$f_2(t)f_2(x-t)\mathbb{1}_{[x-3, 3]}(t)$

D'où

x	$f * f(x)$
$[-4, -2]$	$\frac{x^3}{150} + \frac{2x^2}{25} + \frac{8x}{25} + \frac{32}{75}$
$[-2, 0]$	$-\frac{7x^3}{450} - \frac{4x^2}{75} + \frac{4x}{75} + \frac{56}{225}$
$[0, 1]$	$\frac{2x^3}{675} - \frac{4x^2}{75} + \frac{4x}{75} + \frac{56}{225}$
$[1, 3]$	$\frac{8x^3}{675} - \frac{2x^2}{25} + \frac{2x}{25} + \frac{6}{25}$
$[3, 6]$	$-\frac{2x^3}{675} + \frac{4x^2}{75} - \frac{8x}{25} + \frac{16}{25}$

On remarque que : $\int_{-\infty}^{\infty} f * f(x) dx = 1$

3. Pour $x \in [-6, 4]$, on a : $g * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)g(t) dt$. Or,

$$\begin{aligned}
 g(x-t)g(t) &= g_1(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[-3, 0]}(t)\mathbb{1}_{[x, x+3]}(t) + g_1(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[-3, 0]}(t)\mathbb{1}_{[x-2, x]}(t) \\
 &\quad + g_2(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[0, 2]}(t)\mathbb{1}_{[x, x+3]}(t) + g_2(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[0, 2]}(t)\mathbb{1}_{[x-2, x]}(t)
 \end{aligned}$$

On découpe l'intervalle $[-6, 4]$ en cinq sous intervalles

$$[-6, -3], [-3, -1], [-1, 0], [0, 2], [2, 4]$$

d'où le tableau suivant :

x	$[-3, 0] \cap [x, x+3]$	$[-3, 0] \cap [x-2, x]$	$[0, 2] \cap [x, x+3]$	$[0, 2] \cap [x-2, x]$
$[-6, -3]$	$[-3, x+3]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$[-3, -1]$	$[x, 0]$	$[-3, x]$	$[0, x+3]$	$\emptyset$
$[-1, 0]$	$[x, 0]$	$[x-2, x]$	$[0, 2]$	$\emptyset$
$[0, 2]$	$\emptyset$	$[x-2, 0]$	$[x, 2]$	$[0, x]$
$[2, 4]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[x-2, 2]$

Il vient donc

x	$g(x-t)g(t)$
$[-6, -3]$	$g_1(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[-3, x+3]}(t)$
$[-3, -1]$	$g_1(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[x, 0]}(t) + g_1(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[-3, x]}(t) + g_2(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[0, x+3]}(t)$
$[-1, 0]$	$g_1(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[x, 0]}(t) + g_1(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[x-2, x]}(t) + g_2(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[0, 2]}(t)$
$[0, 2]$	$g_1(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[x-2, 0]}(t) + g_2(t)g_1(x-t)\mathbb{1}_{[x, 2]}(t) + g_2(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[0, x]}(t)$
$[2, 4]$	$g_2(t)g_2(x-t)\mathbb{1}_{[x-2, 2]}(t)$

D'où

x	$g * g(x)$
$[-6, -3]$	$\frac{2x^3}{675} + \frac{4x^2}{75} + \frac{8x}{25} + \frac{16}{25}$
$[-3, -1]$	$-\frac{8x^3}{675} - \frac{2x^2}{25} - \frac{2x}{25} + \frac{6}{25}$
$[-1, 0]$	$-\frac{2x^3}{675} - \frac{4x^2}{75} - \frac{2x}{75} + \frac{56}{225}$
$[0, 2]$	$\frac{7x^3}{450} - \frac{4x^2}{75} - \frac{4x}{75} + \frac{56}{225}$
$[2, 4]$	$-\frac{x^3}{150} + \frac{2x^2}{25} - \frac{8x}{25} + \frac{32}{75}$

On remarque que : $\int_{-\infty}^{\infty} g * g(x) dx = 1$

4. Pour $x \in [-5, 5]$, on a : $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$. Or,

$$\begin{aligned} f(x-t) g(t) &= g_1(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[-3,0]}(t) \mathbb{1}_{[x,x+2]}(t) + g_2(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[0,2]}(t) \mathbb{1}_{[x,x+2]}(t) \\ &+ g_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[-3,0]}(t) \mathbb{1}_{[x-3,x]}(t) + g_2(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[0,2]}(t) \mathbb{1}_{[x-3,x]}(t) \end{aligned}$$

On découpe l'intervalle $[-6, 4]$ en six sous intervalles

$$[-5, -3], [-3, -2], [-2, 0], [0, 2], [2, 3], [3, 5]$$

d'où le tableau suivant :

x	$[-3, 0] \cap [x, x+2]$	$[0, 2] \cap [x, x+2]$	$[-3, 0] \cap [x-3, x]$	$[0, 2] \cap [x-3, x]$
$[-5, -3]$	$[-3, x+2]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$[-3, -2]$	$[x, x+2]$	$\emptyset$	$[-3, x]$	$\emptyset$
$[-2, 0]$	$[x, 0]$	$[0, x+2]$	$[-3, x]$	$\emptyset$
$[0, 2]$	$\emptyset$	$[x, 2]$	$[x-3, 0]$	$[0, x]$
$[2, 3]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[x-3, 0]$	$[0, 2]$
$[3, 5]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[x-3, 2]$

Il vient donc

x	$f(x-t) g(t)$
$[-5, -3]$	$g_1(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[-3,x+2]}(t)$
$[-3, -2]$	$g_1(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[x,x+2]}(t) + g_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[-3,x]}(t)$
$[-2, 0]$	$g_1(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[x,0]}(t) + g_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[0,x+2]}(t) + g_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[-3,x]}(t)$
$[0, 2]$	$g_2(t) f_1(x-t) \mathbb{1}_{[x,2]}(t) + g_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[x-3,0]}(t) + g_2(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[0,x]}(t)$
$[2, 3]$	$g_1(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[x-3,0]}(t) + g_2(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[0,2]}(t)$
$[3, 5]$	$g_2(t) f_2(x-t) \mathbb{1}_{[x-3,2]}(t)$

D'où

x	$f * g(x)$
$[-5, -3]$	$\frac{x^3}{225} + \frac{x^2}{15} + \frac{x}{3} + \frac{5}{9}$
$[-3, -2]$	$-\frac{2x^3}{675} + \frac{2x}{15} + \frac{16}{45}$
$[-2, 0]$	$-\frac{19x^3}{1350} - \frac{x^2}{15} + \frac{4}{15}$
$[0, 2]$	$\frac{19x^3}{1350} - \frac{x^2}{15} + \frac{4}{15}$
$[2, 3]$	$\frac{2x^3}{675} - \frac{2x}{15} + \frac{16}{45}$
$[3, 5]$	$-\frac{x^3}{225} + \frac{x^2}{15} - \frac{x}{3} + \frac{5}{9}$

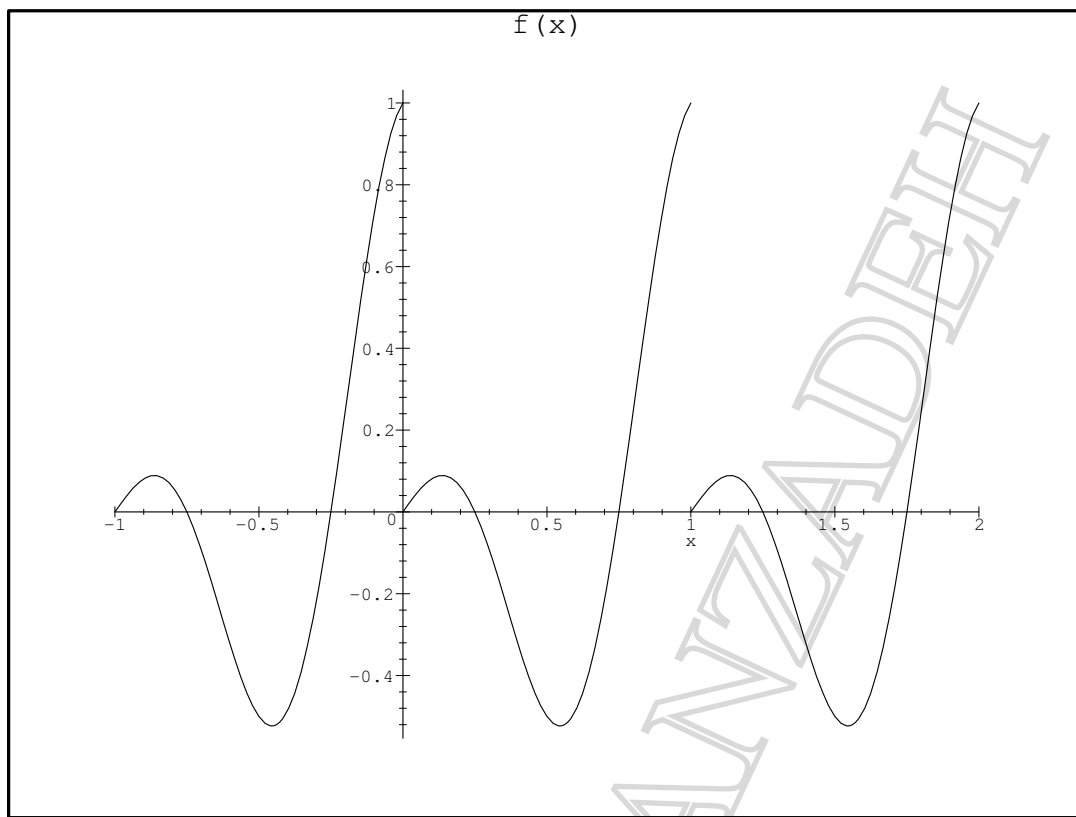
On remarque que : $\int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) dx = 1$

2

1. On a:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx = \frac{8\pi^2 + 3}{48\pi^2} \quad \text{et, } E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} g_0^2(x) dx = \frac{8\pi^2 - 3}{48\pi^2}$$

2. La figure suivante donne la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1, 2]$



2.1. On a: $f(0^-) = 1$ et $f(0^+) = 0$ d'où $f(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{1}{2}$.

De même $f(1^-) = 1$ et $f(1^+) = 0$ d'où $f(1) = \frac{f(1^-) + f(1^+)}{2} = \frac{1}{2}$.

2.2. On a : $a_0(f) = \int_0^1 f_0(x) dx = 0$ et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n(f) &= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi x) \cos(2\pi n x) dx \\ &= \int_0^1 x (\cos 2\pi(n-1)x + \cos 2\pi(n+1)x) dx \end{aligned}$$

Donc si $n = 1$, $a_1(f) = \frac{1}{2}$ et pour $n \geq 2$, $a_n(f) = 0$.

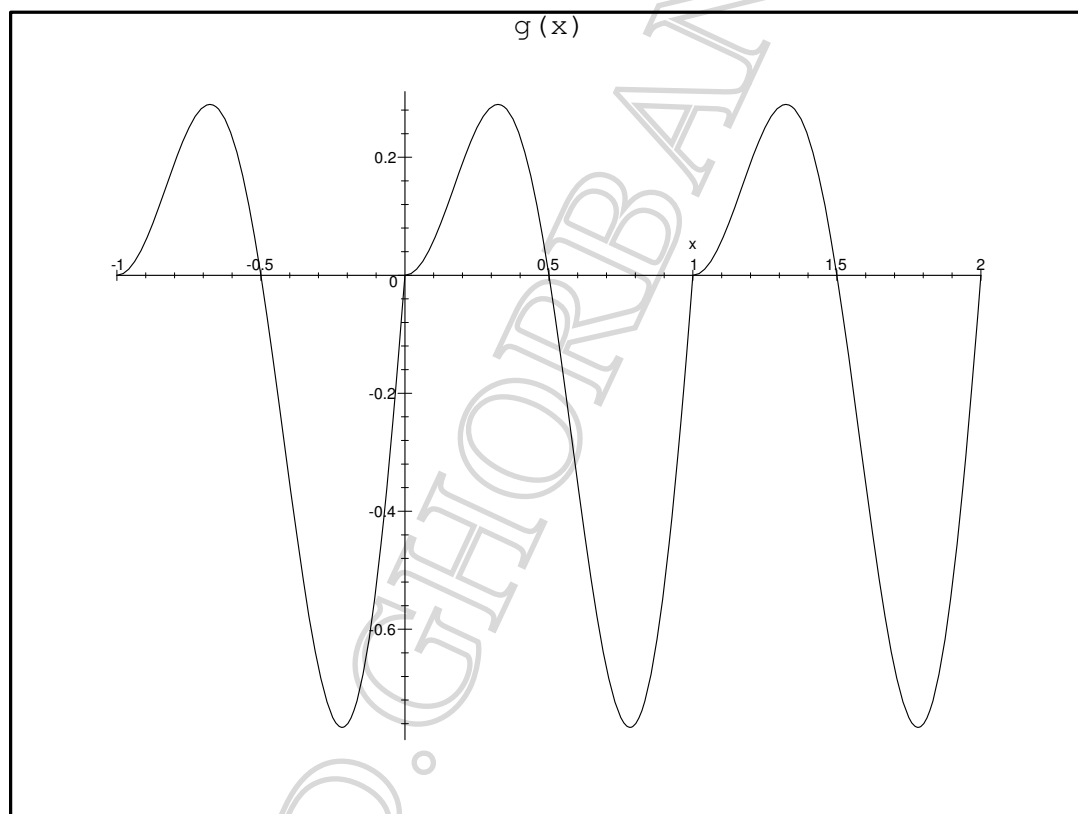
$$\begin{aligned} b_n(f) &= 2 \int_0^1 x \cos(2\pi x) \sin(2\pi n x) dx \\ &= \int_0^1 x (\sin 2\pi(1-n)x + \sin 2\pi(n+1)x) dx \end{aligned}$$

Donc si $n = 1$, $b_1(f) = -\frac{1}{4\pi}$ et pour $n \geq 2$, $b_n(f) = -\frac{n}{\pi(n^2 - 1)}$.

On en déduit S_f la série de Fourier de f :

$$S_f(x) = \frac{1}{2} \cos 2\pi x - \frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \sin 2n\pi x$$

3. La figure suivante donne la représentation graphique de g sur l'intervalle $[-1, 2]$



3.1. On a: $g(0^-) = 0$ et $g(0^+) = 0$ d'où $g(0) = \frac{g(0^-) + g(0^+)}{2} = 0$.

De même $g(1^-) = 0$ et $g(1^+) = 0$ d'où $g(1) = \frac{g(1^-) + g(1^+)}{2} = 0$.

3.2. On a : $a_0(g) = \int_0^1 g_0(x) dx = -\frac{1}{2\pi}$ et pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n(g) &= 2 \int_0^1 x \sin(2\pi x) \cos(2\pi n x) dx \\ &= \int_0^1 x (\sin 2\pi(1-n)x + \sin 2\pi(n+1)x) dx \end{aligned}$$

Donc si $n = 1$, $a_1(g) = -\frac{1}{4\pi}$ et pour $n \geq 2$, $a_n(g) = \frac{1}{\pi(n^2 - 1)}$.

$$\begin{aligned} b_n(g) &= 2 \int_0^1 x \sin(2\pi x) \sin(2\pi n x) dx \\ &= \int_0^1 x (\cos 2\pi(1-n)x + \cos 2\pi(n+1)x) dx \end{aligned}$$

Donc si $n = 1$, $b_1(g) = \frac{1}{2}$ et pour $n \geq 2$, $b_n(g) = 0$.

On en déduit S_g la série de Fourier de g :

$$S_g(x) = -\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \cos 2\pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2 - 1} + \frac{1}{2} \sin 2\pi x$$

4. Par la relation de Parseval on :

$$E_2^2 = a_0^2(g) + \frac{1}{2} \left(a_1^2(g) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2(g) + b_1^2(g) \right)$$

On en déduit :

$$S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{11}{16}$$

$$E_1^2 = \frac{1}{2} \left(a_1^2(f) + b_1^2(f) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2(f) \right)$$

On en déduit :

$$S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16}$$

Devoir N°4

Soit N un entier supérieur ou égal à 2, pour $m \in \{1, \dots, 2N\}$ on considère les fonctions f_m et g_m définies par :

$$f_m(x) = \text{Max}\{m, 2N + 1 - m\} \mathbb{1}_{[m-1, m[}(x)$$

$$g_m(x) = \text{Min}\{m, 2N + 1 - m\} \mathbb{1}_{[m-1, m[}(x)$$

et on pose : $f(x) = \sum_{m=1}^{2N} f_m(x)$, $g(x) = \sum_{m=1}^{2N} g_m(x)$.

1. Pour $N = 2$, $N = 3$, $N = 5$ donner les représentations graphiques de f et de g .
2. Montrer que pour tout $m \in \{1, \dots, 2N\}$, $f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $g_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Que peut-on en conclure pour f et g ?
3. Déterminer $E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$ et $E(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) dx$
4. Déterminer K_{f_m} l'autocorrélation temporelle de f_m définie par :

$$K_{f_m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) f_m(\tau + x) dx$$

5. Déterminer K_{g_m} l'autocorrélation temporelle de g_m définie par :

$$K_{g_m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) g_m(\tau + x) dx$$

6. Déterminer K_{f_m, g_m} l'intercorrélation temporelle de f_m et g_m définie par :

$$K_{f_m, g_m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) g_m(\tau + x) dx$$

7. Déterminer K_{g_m, f_m} l'intercorrélation temporelle de g_m et f_m définie par :

$$K_{g_m, f_m}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) f_m(\tau + x) dx$$

- 8.1. Déterminer $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}(f_m)$ la transformée de Fourier de f_m .
- 8.2. Déterminer l'étalement et la densité spectrale d'énergie de f_m .
- 8.3. Déterminer $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f .
- 8.4. Déterminer l'étalement temporel et la densité spectrale d'énergie de f .
- 9.1. Déterminer $\mathcal{G}_m = \mathcal{F}(g_m)$ la transformée de Fourier de g_m .
- 9.2. Déterminer l'étalement temporel et la densité spectrale d'énergie de g_m .
- 9.3. Déterminer $\mathcal{F}(g)$ la transformée de Fourier de g .
- 9.4. Déterminer l'étalement et la densité spectrale d'énergie de g .

On rappelle que

$$\sum_{k=0}^n \theta^k = \frac{1 - \theta^{n+1}}{1 - \theta}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k \neq j} \sum a_k a_j$$

Mathématique du Signal Déterministe

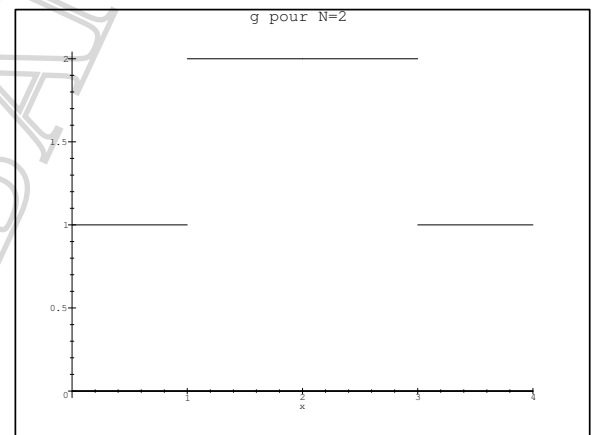
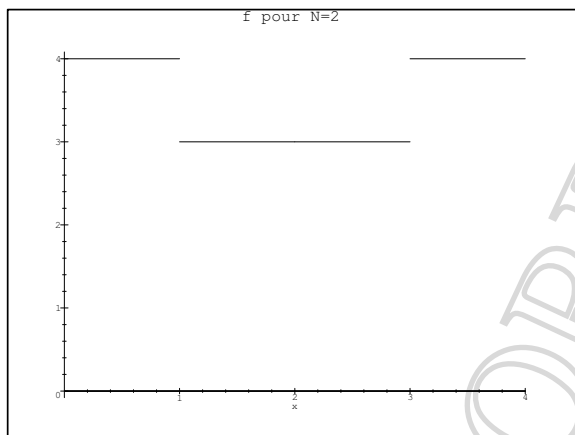
Année 2002-03

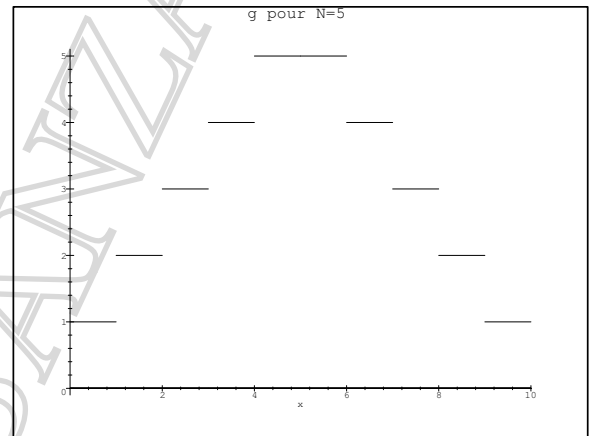
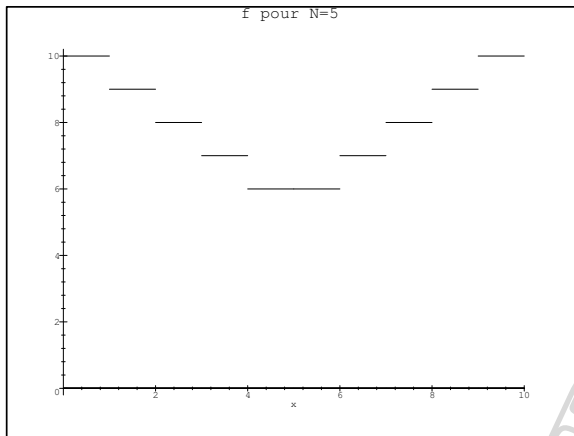
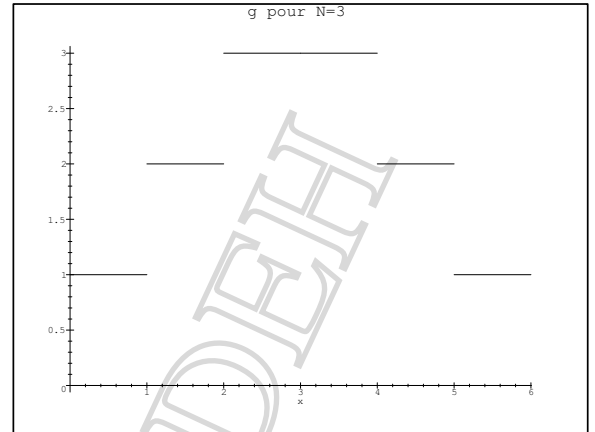
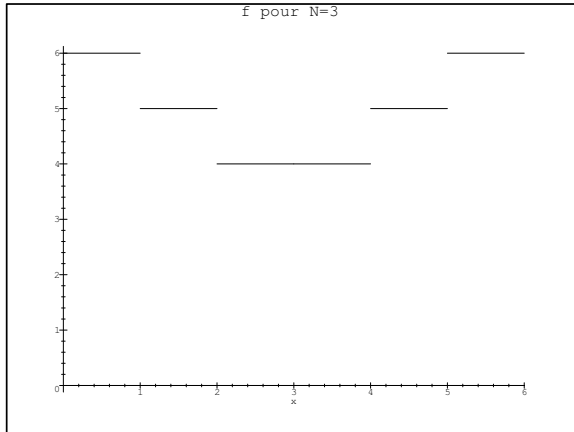
corrigé de devoir N°4

On remarque que pour tout $m \in \{1, \dots, 2N\}$ on a :

$$\begin{aligned} \text{Max}\{m, 2N+1-m\} &= \begin{cases} 2N+1-m & \text{si } 1 \leq m \leq N \\ m & \text{si } N+1 \leq m \leq 2N \end{cases} \\ \text{Min}\{m, 2N+1-m\} &= \begin{cases} m & \text{si } 1 \leq m \leq N \\ 2N+1-m & \text{si } N+1 \leq m \leq 2N \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

1. Les figures suivantes représentent les représentations graphiques de f et de g :





2. Pour tout $m \in \{1, \dots, 2N\}$ on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) dx = \text{Max}\{m, 2N + 1 - m\} \int_{m-1}^m dx = \text{Max}\{m, 2N + 1 - m\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_m^2(x) dx = (\text{Max}\{m, 2N + 1 - m\})^2 \int_{m-1}^m dx = (\text{Max}\{m, 2N + 1 - m\})^2$$

Ce qui montre que tout $m \in \{1, \dots, 2N\}$, $f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. De même, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) dx = \text{Min}\{m, 2N + 1 - m\} \int_{m-1}^m dx = \text{Min}\{m, 2N + 1 - m\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m^2(x) dx = (\text{Min}\{m, 2N + 1 - m\})^2 \int_{m-1}^m dx = (\text{Min}\{m, 2N + 1 - m\})^2$$

donc $g_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. f et g étant la somme des fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, elles appartiennent donc à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

On remarque que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \sum_{m=1}^{2N} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) dx \\ &= \sum_{m=1}^N (2N+1-m) + \sum_{m=N+1}^{2N} m = N(3N+1)\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx &= \sum_{m=1}^{2N} \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) dx \\ &= \sum_{m=1}^N m + \sum_{m=N+1}^{2N} (2N+1-m) = N(N+1)\end{aligned}\quad (3)$$

3. En utilisation (1) les expressions de f et g s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{m=1}^N (2N+1-m) \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x) + \sum_{m=N+1}^{2N} m \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x) \\ g(x) &= \sum_{m=1}^N m \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x) + \sum_{m=N+1}^{2N} (2N+1-m) \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x)\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que si $1 \leq i \leq N$ et $N+1 \leq j \leq 2N$:

$]i-1, i[\cap]j-1, j[= \emptyset$, on a :

$$\begin{aligned}E(f) &= \sum_{m=1}^N (2N+1-m)^2 + \sum_{m=N+1}^{2N} m^2 = \frac{N(2N+1)(7N+1)}{3} \\ E(g) &= \sum_{m=1}^N m^2 + \sum_{m=N+1}^{2N} (2N+1-m)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{3}\end{aligned}\quad (4)$$

4. Par définition on a :

$$K_{f_m}(\tau) = (\text{Max}\{m, 2N+1-m\})^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x) \mathbb{1}_{]m-1, m[}(\tau+x) dx$$

• Domaine de τ : de $m-1 < \tau+x < m$ on déduit $m-1-x < \tau < m-x$, d'autre part, la condition $m-1 < x < m$ implique : $0 < m-x < 1$ et $-1 < m-1-x < 0$ d'où $\boxed{-1 < \tau < 1}$. Donc, on a :

$$K_{f_m}(\tau) = (\text{Max}\{m, 2N+1-m\})^2 \int_{\sup\{m, m-\tau\}}^{\inf\{m-1, m-1-\tau\}} dx$$

$$\boxed{K_{f_m}(\tau) = (\text{Max}\{m, 2N+1-m\})^2 (1-|\tau|)^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(\tau)} \quad (5)$$

5. Par définition on a :

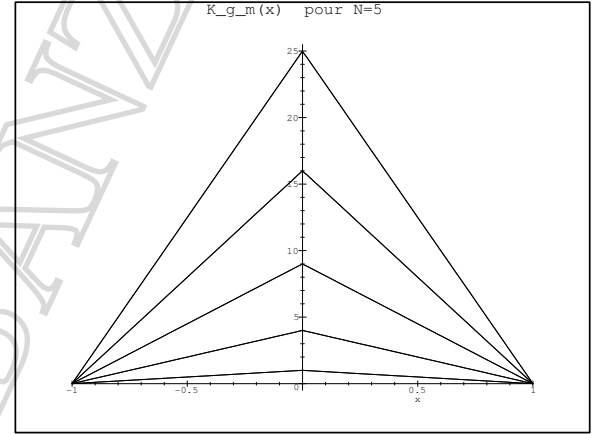
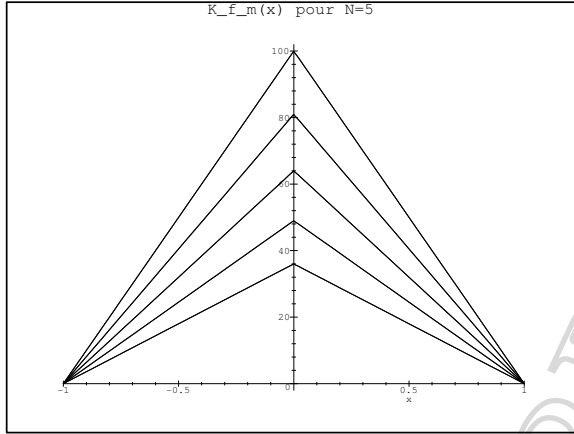
$$K_{g_m}(\tau) = (\text{Min}\{m, 2N + 1 - m\})^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x) \mathbb{1}_{]m-1, m[}(\tau + x) dx$$

- Domaine de τ : de $m - 1 < \tau + x < m$ on déduit $m - 1 - x < \tau < m - x$, d'autre part, la condition $m - 1 < x < m$ implique : $0 < m - x < 1$ et $-1 < m - 1 - x < 0$ d'où $-1 < \tau < 1$. Donc, on a :

$$K_{g_m}(\tau) = (\text{Min}\{m, 2N + 1 - m\})^2 \int_{\sup\{m, m-\tau\}}^{\inf\{m-1, m-1-\tau\}} dx$$

$$\boxed{K_{g_m}(\tau) = (\text{Min}\{m, 2N + 1 - m\})^2 (1 - |\tau|)^2 \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\tau)} \quad (6)$$

Les figures suivantes représentent les représentations graphiques de K_{f_m} et de K_{g_m} :



6. En tenant compte de l'identité $\text{Max}(A, B) \text{Min}(A, b) = AB$ on a :

$$K_{f_m, g_m}(\tau) = m(2N + 1 - m) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{]m-1, m[}(x) \mathbb{1}_{]m-1, m[}(\tau + x) dx$$

- Domaine de τ : de $m - 1 < \tau + x < m$ on déduit $m - 1 - x < \tau < m - x$, d'autre part, la condition $m - 1 < x < m$ implique : $0 < m - x < 1$ et $-1 < m - 1 - x < 0$ d'où $-1 < \tau < 1$. Donc, on a :

$$K_{f_m, g_m}(\tau) = m(2N + 1 - m) \int_{\sup\{m, m-\tau\}}^{\inf\{m-1, m-1-\tau\}} dx$$

$$\boxed{K_{f_m, g_m}(\tau) = m(2N + 1 - m) (1 - |\tau|)^2 \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\tau)} \quad (7)$$

7. De même qu'en question 6), on a :

$$K_{g_m, f_m}(\tau) = m(2N + 1 - m) (1 - |\tau|)^2 \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\tau) \quad (8)$$

8.1. Par définition on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \text{Max}\{m, 2N + 1 - m\} \int_{m-1}^m dx \\ &= \text{Max}\{m, 2N + 1 - m\} e^{-2im\pi\nu + i\pi\nu} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \end{aligned} \quad (9)$$

8.2. La densité spectrale d'énergie de f_m est définie par : $|\mathcal{F}_m|^2$. On a :

$$|\mathcal{F}_m(\nu)|^2 = \mathcal{F}_m(\nu) \overline{\mathcal{F}_m(\nu)} = \left(\text{Max}\{m, 2N + 1 - m\} \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} \right)^2$$

L'étalement temporel d'énergie de f_m est définie par :

$$\langle f_m \rangle^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_m^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f_m^2(x) dx}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_m^2(x) dx &= (\text{Max}\{m, 2N + 1 - m\})^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_m^2(x) dx &= \frac{3m^2 - 3m + 1}{3} (\text{Max}\{m, 2N + 1 - m\})^2 \end{aligned}$$

On en déduit $\langle f_m \rangle^2 = \frac{3m^2 - 3m + 1}{3}$

8.3. En utilisant (9) on :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\nu) &= \sum_{m=1}^{2N} \mathcal{F}_m(\nu) = \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} e^{i\pi \nu} \sum_{m=1}^{2N} \text{Max}\{m, 2N + 1 - m\} e^{-2im\pi \nu} \\ &= \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} e^{i\pi \nu} \left(\sum_{m=1}^N (2N + 1 - m) e^{-2im\pi \nu} + \sum_{m=N+1}^{2N} m e^{-2im\pi \nu} \right) \\ &= \frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu} e^{i\pi \nu} \left(\sum_{m=1}^N (2N + 1 - m) e^{-2im\pi \nu} + \sum_{m=1}^N (m + N) e^{-2i(m+N)\pi \nu} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi \nu \sin^3 \pi \nu} (A_f + iB_f) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_f &= 2N \cos 3\pi \nu + \cos((2N - 1)\pi \nu) - (2N + 1) \cos \pi \nu - (2N + 1) \cos((4N - 3)\pi \nu) \\ &\quad + 2N \cos((4N - 1)\pi \nu) + \cos((2N - 3)\pi \nu) \\ B_f &= 2N \sin 3\pi \nu - \sin((2N - 1)\pi \nu) - (2N + 1) \sin \pi \nu + (2N + 1) \sin((4N - 3)\pi \nu) \\ &\quad - 2N \sin((4N - 1)\pi \nu) - \sin((2N - 3)\pi \nu) \end{aligned}$$

8.4. La densité spectrale d'énergie de f est définie par : $|\mathcal{F}(f)|^2$. On a :

$$|\mathcal{F}(f)(\nu)|^2 = \mathcal{F}(f)(\nu) \overline{\mathcal{F}(f)(\nu)} = \frac{A_f^2 + B_f^2}{(8\pi\nu \sin^3 \pi\nu)^2}$$

9.1. Par définition on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_m(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \text{Min}\{m, 2N+1-m\} \int_{m-1}^m dx \\ &= \text{Min}\{m, 2N+1-m\} e^{-2im\pi\nu + i\pi\nu} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \end{aligned} \quad (10)$$

9.2. La densité spectrale d'énergie de g_m est définie par : $|\mathcal{G}_m|^2$. On a :

$$|\mathcal{G}_m(\nu)|^2 = \mathcal{G}_m(\nu) \overline{\mathcal{G}_m(\nu)} = \left(\text{Min}\{m, 2N+1-m\} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \right)^2$$

L'étalement temporel d'énergie de g_m est définie par :

$$\langle g_m \rangle^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_m^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g_m^2(x) dx}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g_m^2(x) dx &= (\text{Min}\{m, 2N+1-m\})^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_m^2(x) dx &= \frac{3m^2 - 3m + 1}{3} (\text{Min}\{m, 2N+1-m\})^2 \end{aligned}$$

On en déduit

$$\langle g_m \rangle^2 = \frac{3m^2 - 3m + 1}{3}$$

9.3. En utilisant (10) on :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g)(\nu) &= \sum_{m=1}^{2N} \mathcal{G}_m(\nu) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{i\pi\nu} \sum_{m=1}^{2N} \text{Min}\{m, 2N+1-m\} e^{-2im\pi\nu} \\ &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{i\pi\nu} \left(\sum_{m=1}^N m e^{-2im\pi\nu} + \sum_{m=N+1}^{2N} (2N+1-m) e^{-2im\pi\nu} \right) \\ &= \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} e^{i\pi\nu} \left(\sum_{m=1}^N m e^{-2im\pi\nu} + \sum_{m=1}^N (N+1-m) e^{-2i(m+N)\pi\nu} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi\nu \sin^3 \pi\nu} (A_g + iB_g) \end{aligned}$$

avec

$$A_g = \cos 3\pi\nu - \cos((2N-3)\pi\nu) + \cos((4N-1)\pi\nu) - \cos((2N-1)\pi\nu)$$

$$B_g = \sin 3\pi\nu + \sin((2N-3)\pi\nu) - \sin((4N-1)\pi\nu) + \sin((2N-1)\pi\nu)$$

9.4. La densité spectrale d'énergie de g est définie par : $|\mathcal{F}(g)|^2$. On a :

$$|\mathcal{F}(g)(\nu)|^2 = \mathcal{F}(g)(\nu) \overline{\mathcal{F}(g)(\nu)} = \frac{A_g^2 + B_g^2}{(8\pi\nu \sin^3 \pi\nu)^2}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2002-03

Devoir N°5

Exercice 1

On considère le système d'équations différentielles suivant (pour $t \geq 0$):

$$\begin{cases} x'(t) - y''(t) = 0 \\ x''(t) - y'(t) = (\cos t - \sin t) e^{-t} \end{cases} \quad (\mathbf{E})$$

avec les conditions initiales $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.

1. Calculer $x''(0)$ et $y''(0)$.
2. En utilisant la transformée de Laplace résoudre le système $\mathbf{E}$.
3. Montrer qu'il existe une fonction g telle que l'on ait :
 $x(t) = g * ch(t)$ et $y(t) = g * sh(t)$.

Exercice 2

On considère la fonction f_0 définie sur $[-2, 1]$ par :

$$f_0(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 6 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ x^3 - 2x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer $[f_0]'$, $[f_0]''$, $[f_0]^{(3)}$ et $[f_0]^{(4)}$.
2. Déterminer la transformée de Fourier de f_0 .
3. Soit f une fonction périodique de période $T = 3$, égale à f_0 sur $[-2, 1]$. Déterminer le développement en série de Fourier de f .

corrigé de devoir N°5

1

On a :

$$\begin{cases} x'(t) - y''(t) = 0 & (1) \\ x''(t) - y'(t) = (\cos t - \sin t) e^{-t} & (2) \end{cases}$$

1. D'après (1) on a : $x'(0) - y''(0) = 0$ d'où $y''(0) = 0$ D'après (2) on a : $x''(0) - y'(0) = 1$ d'où $x''(0) = 1$ 2. Notons X et Y les transformées de Laplace de x et y . En prenant la transformée Laplace de (1) et (2) on obtient :

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) - p^2Y(p) + py(0) + y'(0) = 0 \\ p^2X(p) - px(0) - x'(0) - pY(p) + y(0) = \frac{p}{(p+1)^2 + 1} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} pX(p) - p^2Y(p) = 0 & (3) \\ p^2X(p) - pY(p) = \frac{p}{(p+1)^2 + 1} & (4) \end{cases}$$

En emportant (3) dans (4) on obtient : $p^3Y(p) - pY(p) = \frac{p}{(p+1)^2 + 1}$ d'où

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 - 1) [(p+1)^2 + 1]} \quad (5)$$

De (3) on déduit :

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 - 1) [(p+1)^2 + 1]} \quad (6)$$

En décomposant (5) et (6) en éléments simples on a :

$$\begin{cases} X(p) = \frac{1}{10} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} - \frac{1}{5} \frac{3p+4}{(p+1)^2+1} \\ Y(p) = \frac{1}{10} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{5} \frac{2p+1}{(p+1)^2+1} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{10} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{3 \cos t + \sin t}{5} e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{10} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{2 \cos t - \sin t}{5} e^{-t} \end{cases}$$

3. Notons G la transformée de Laplace de g et $h_1(t) = \text{cht}$, $h_2(t) = \text{sht}$, on a :

$$L(h_1)(p) = \frac{p}{p^2-1} \quad \text{et} \quad L(h_2)(p) = \frac{1}{p^2-1}$$

D'autre part, on peut écrire (6) sous la forme

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1} \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

on peut écrire (5) sous la forme

$$Y(p) = \frac{1}{p^2-1} \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

On en déduit : $G(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}$ d'où $g(t) = \sin t e^{-t}$.

2

1. On remarque que f_0 est continue, on a donc $[f_0]' = [f_0']$ avec

$$f_0'(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 3x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

On remarque que f_0' est discontinue aux points : $-2, -1, 1$ avec les sauts :

$$\Delta f_0'(-2) = f_0'(-2^+) - f_0'(-2^-) = 1 - 0 = 1$$

$$\Delta f_0'(-1) = f_0'(-1^+) - f_0'(-1^-) = 1 - 3 = -2$$

$$\Delta f_0'(1) = f_0'(1^+) - f_0'(1^-) = 0 - 1 = -1$$

D'où $[f_0]'' = [f_0''] + \delta_{\{-2\}} - 2\delta_{\{-1\}} - \delta_{\{1\}}$ avec

$$f_0''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 6x & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

On remarque que f_0'' est discontinue aux points : $-2, -1, 1$ avec les sauts :

$$\Delta f_0''(-2) = f_0''(-2^+) - f_0''(-2^-) = 2 - 0 = 2$$

$$\Delta f_0''(-1) = f_0''(-1^+) - f_0''(-1^-) = -6 - 2 = -8$$

$$\Delta f_0''(1) = f_0''(1^+) - f_0''(1^-) = 0 - 6 = -6$$

D'où $[f_0]^{(3)} = [f_0^{(3)}] + \delta'_{\{-2\}} - 2\delta'_{\{-1\}} - \delta'_{\{1\}} + 2\delta_{\{-2\}} - 8\delta_{\{-1\}} - 6\delta_{\{1\}}$ avec

$$f_0^{(3)}(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $f_0^{(3)}$ est discontinue aux points : $-1, 1$ avec les sauts :

$$\Delta f_0^{(3)}(-1) = f_0^{(3)}(-1^+) - f_0^{(3)}(-1^-) = 6 - 0 = 6$$

$$\Delta f_0^{(3)}(1) = f_0^{(3)}(1^+) - f_0^{(3)}(1^-) = 0 - 6 = -6$$

D'où , en tenant compte de $f_0^{(4)}(x) = 0 \forall x$

$$[f_0]^{(4)} = \delta''_{\{-2\}} - 2\delta''_{\{-1\}} - \delta''_{\{1\}} + 2\delta'_{\{-2\}} - 8\delta'_{\{-1\}} - 6\delta'_{\{1\}} + 6\delta_{\{-1\}} - 6\delta_{\{1\}}$$

2. D'après le cours, pour toute distribution T , on a :

$$\mathcal{F}(T^{(m)})(\nu) = (2i\pi\nu)^m \mathcal{F}(T)(\nu)$$

D'autre part, on sait que : $\mathcal{F}(\delta_{\{\theta\}})(\nu) = e^{-2i\pi\theta\nu}$ on en déduit :

$$\mathcal{F}(\delta_{\{\theta\}}^{(m)})(\nu) = (2i\pi\nu)^m e^{-2i\pi\theta\nu}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([f_0]^{(4)})(\nu) &= (2i\pi\nu)^4 \mathcal{F}([f_0])(\nu) \\ &= (2i\pi\nu)^2 (e^{4i\pi\nu} - 2e^{2i\pi\nu} - e^{-2i\pi\nu}) + (2i\pi\nu) (2e^{4i\pi\nu} - 8e^{2i\pi\nu} - 6e^{-2i\pi\nu}) \\ &\quad + 6e^{2i\pi\nu} - 6e^{-2i\pi\nu} \\ &= (2i\pi\nu)^2 (e^{4i\pi\nu} - e^{2i\pi\nu} - 2\cos(2\pi\nu)) \\ &\quad + (2i\pi\nu) (2e^{4i\pi\nu} - 2e^{2i\pi\nu} - 12\cos(2\pi\nu)) + 12i\sin(2\pi\nu) \\ &= (2i\pi\nu)^2 [\cos(4\pi\nu) - 3\cos(2\pi\nu) + i(\sin(4\pi\nu) - \sin(2\pi\nu))] \\ &\quad + (2i\pi\nu) [2\cos(4\pi\nu) - 14\cos(2\pi\nu) + 2i(\sin(4\pi\nu) - \sin(2\pi\nu))] \\ &\quad + 12i\sin(2\pi\nu) \\ &= -(2\pi\nu)^2 (\cos(4\pi\nu) - 3\cos(2\pi\nu)) - 4\pi\nu (\sin(4\pi\nu) - \sin(2\pi\nu)) \\ &\quad - i(2\pi\nu)^2 (\sin(4\pi\nu) - \sin(2\pi\nu)) + (4i\pi\nu) (\cos(4\pi\nu) - 7\cos(2\pi\nu)) \\ &\quad + 12i\sin(2\pi\nu) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([f_0])(\nu) &= \frac{-(2\pi\nu)^2 (\cos(4\pi\nu) - 3\cos(2\pi\nu)) - 4\pi\nu (\sin(4\pi\nu) - \sin(2\pi\nu))}{(2\pi\nu)^4} \\ &\quad + i \frac{-(2\pi\nu)^2 (\sin(4\pi\nu) - \sin(2\pi\nu)) + (4\pi\nu) (\cos(4\pi\nu) - 7\cos(2\pi\nu))}{(2\pi\nu)^4} \\ &\quad + i \frac{12\sin(2\pi\nu)}{(2\pi\nu)^4} \end{aligned}$$

3. D'après le *théorème 5.31* de cours, les coefficients de Fourier complexes de f sont définis par :

$$c_n = \frac{1}{3} \mathcal{F}([f_0])\left(\frac{n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}$$

D'où $c_0 = \frac{17}{18}$ et pour $\forall k \geq 1$:

$$c_{3k-2} = \frac{243}{16 \pi^4} \left\{ \frac{-\left(\frac{2\pi(3k-2)}{3}\right)^2 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}}{(3k-2)^4} + i \frac{\left(\frac{2\pi(3k-2)}{3}\right)^2 \sqrt{3} + \frac{12\pi(3k-2)}{3} + 6\sqrt{3}}{(3k-2)^4} \right\}$$

$$c_{3k-1} = \frac{243}{16 \pi^4} \left\{ \frac{-\left(\frac{2\pi(3k-1)}{3}\right)^2 - \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}}{(3k-1)^4} + i \frac{-\left(\frac{2\pi(3k-1)}{3}\right)^2 \sqrt{3} + \frac{12\pi(3k-1)}{3} - 6\sqrt{3}}{(3k-1)^4} \right\}$$

$$c_{3k} = \frac{3}{16 \pi^3} \left\{ \frac{16 \pi}{k^2} - i \frac{24}{k^3} \right\}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Devoir N°1

Exercice 1

On considère la fonction f_0 définie par : $f_0(x) = \begin{cases} \cos 2\pi x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Soit f une fonction périodique de période 2 et égale à f_0 sur l'intervalle $[0, 2]$.

1. Déterminer l'expression de f sur les intervalles $[-2, 0]$ et $[2, 4]$.
2. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2, 4]$.

3. Calculer $\int_{-2}^2 f(x) dx$

Exercice 2

Pour $n \geq 1$ on définit la suite de fonction f_n par : $f_n(x) = \frac{e^{-n|x|}}{e^{nx} + e^{-nx}}$.

1. Étudier la variation de f_1 . En déduire la représentation graphique de f_1 . Peut-on en déduire la représentation graphique de f_2 .

2. Calculer $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

3. Calculer $J_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$.

Exercice 3

Pour tout réel x on note $h(x) = e^{-x^2}$ et on pourra utiliser que $h'(x) = -2x h(x)$.

Pour tout $x \geq 0$ on définit la fonction **erf** par : $\text{erf}(x) = \int_0^x h(t) dt$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $H_n(x) = \int_0^x t^n h(t) dt$.

1. Déterminer les expressions de $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ et $H_4(x)$.

2. Exprimer $H_n(x)$ en fonction de n et $\text{erf}(x)$.

D. GHORBANZADEH

corrigé de devoir N°1

1

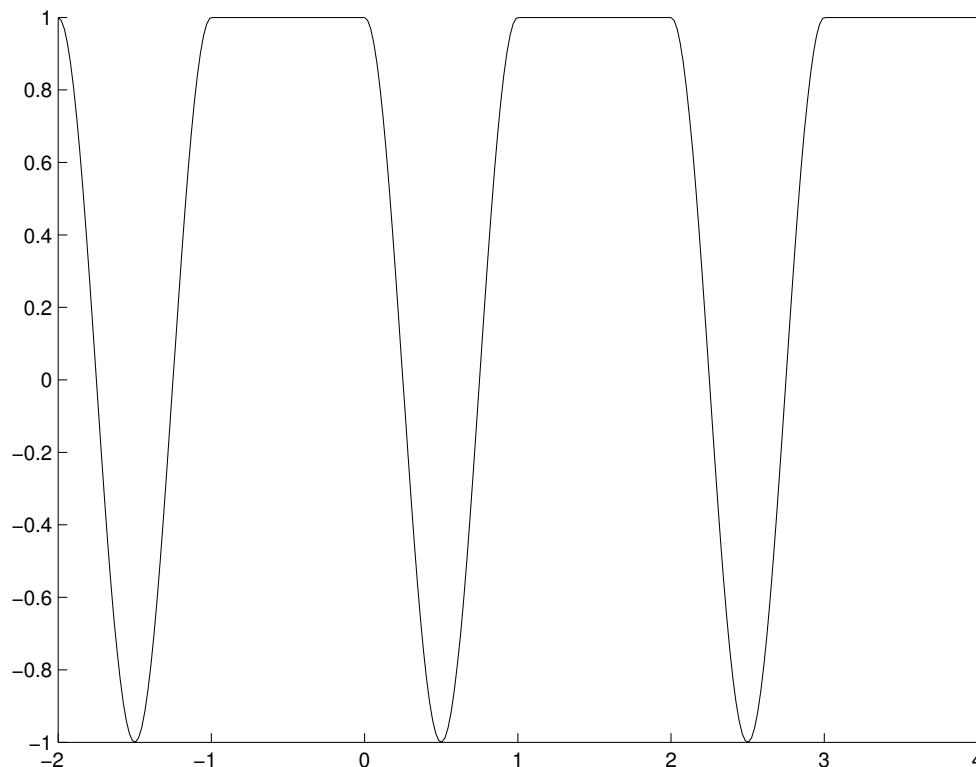
1. Sur l'intervalle $[-2, 0]$ l'expression de f est donnée par :

$$f_0(x+2) = \begin{cases} \cos 2\pi(x+2) & \text{si } 0 \leq x+2 \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x+2 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \cos 2\pi x & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Sur l'intervalle $[2, 4]$ l'expression de f est donnée par :

$$f_0(x-2) = \begin{cases} \cos 2\pi(x-2) & \text{si } 0 \leq x-2 \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x-2 \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \cos 2\pi x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

2. Sur l'intervalle $[-2, 4]$ on a la représentation suivante de f :

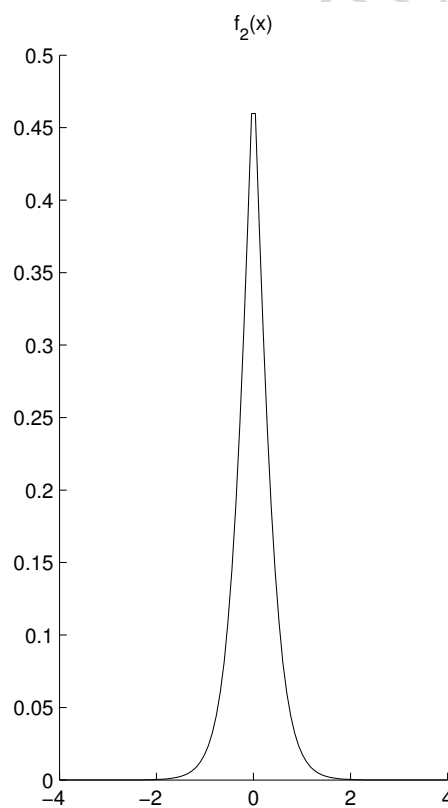
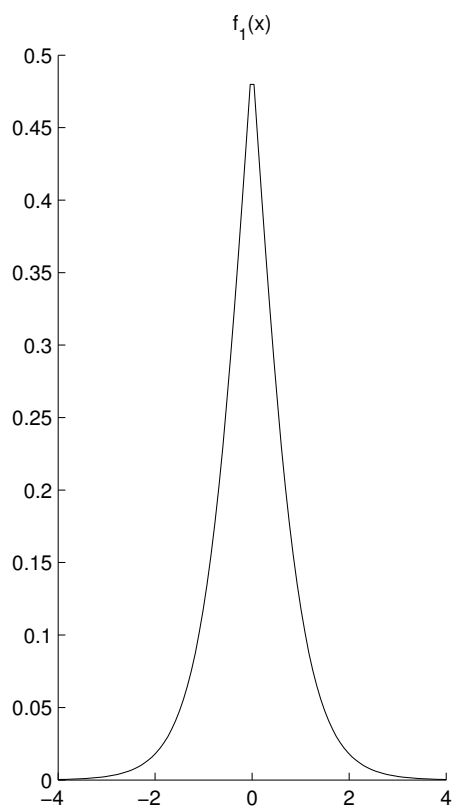


3. On a :

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f_0(x) dx = 2$$

2

1. Pour $n = 1$ on a : $f_1(x) = \frac{e^{-|x|}}{e^x + e^{-x}}$ et $f'_1(x) = \begin{cases} \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



2. On remarque que pour tout n , f_n est paire d'où

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f_n(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2nx}}{1 + e^{-2nx}} dx$$

En effectuant le changement de variable $u = e^{-nx}$ ($du = -n e^{-nx} dx$), on obtient :

$$I_n = \frac{2}{n} \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} du = \frac{1}{n} [\ln(1+u^2)]_0^1 = \frac{\ln 2}{n}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

D. GHORBANZADEH

3. On a :

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-4nx}}{(1 + e^{-2nx})^2} dx$$

En effectuant le changement de variable $u = e^{-nx}$ ($du = -n e^{-nx} dx$), on obtient :

$$J_n = \frac{2}{n} \int_0^1 \frac{u^3}{(1 + u^2)^2} du$$

En effectuant le changement de variable $\frac{u^2}{1 + u^2} = \lambda$ ($\frac{2u}{(1 + u^2)^2} = d\lambda$), on obtient :

$$J_n = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\lambda}{1 - \lambda} d\lambda = \frac{1}{n} [-\ln(1 - \lambda) - \lambda]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\ln 2 - 1}{2n}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

2

On remarque que $H_0(x) = \int_0^x h(t) dt = \mathbf{erf}(x)$.

1. pour $n = 1$, on a :

$$H_1(x) = \int_0^x t h(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^x h'(t) dt = \frac{h(0) - h(x)}{2} = \frac{1 - h(x)}{2}$$

pour $n = 2$, on a : $H_2(x) = \int_0^x t^2 h(t) dt$, effectuons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} t = u \\ t h(t) dt = dv \end{cases} \iff \begin{cases} dt = du \\ -\frac{1}{2} h(t) = v \end{cases}$$

$$H_2(x) = \left[-\frac{1}{2} t h(t) \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x h(t) dt = \frac{1}{2} (-x h(x) + \mathbf{erf}(x))$$

pour $n = 3$, on a : $H_3(x) = \int_0^x t^3 h(t) dt$, effectuons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} t^2 = u \\ t h(t) dt = dv \end{cases} \iff \begin{cases} 2t dt = du \\ -\frac{1}{2} h(t) = v \end{cases}$$

$$H_3(x) = \left[-\frac{1}{2} t^2 h(t) \right]_0^x + \int_0^x t h(t) dt = -\frac{1}{2} x^2 h(x) + H_1(x)$$

Soit $H_3(x) = \frac{1}{2} (1 - h(x) - x^2 h(x))$

pour $n = 4$, on a : $H_4(x) = \int_0^x t^4 h(t) dt$, effectuons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} t^3 = u \\ t h(t) dt = dv \end{cases} \iff \begin{cases} 3t^2 dt = du \\ -\frac{1}{2} h(t) = v \end{cases}$$

$$H_4(x) = \left[-\frac{1}{2} t^3 h(t) \right]_0^x + \frac{3}{2} \int_0^x t^2 h(t) dt = -\frac{1}{2} x^3 h(x) + \frac{3}{2} H_2(x)$$

Soit $H_4(x) = -\frac{(3x + 2x^3) h(x)}{2 \times 2} + \frac{3}{2 \times 2} \text{erf}(x)$

On Remarque que H_0 , H_2 et H_4 dépendent de h et erf , alors que H_1 et H_3 ne dépendent que de h . Donc l'expression de H_n dépend de la parité de n , pour cela calculons H_{2n} et H_{2n+1} .

On a : $H_{2n}(x) = \int_0^x t^{2n} h(t) dt$. Effectuons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} t^{2n-1} = u \\ t h(t) dt = dv \end{cases} \iff \begin{cases} (2n-1) t^{2n-2} dt = du \\ -\frac{1}{2} h(t) = v \end{cases}$$

$$H_{2n}(x) = \left[-\frac{1}{2} t^{2n-1} h(t) \right]_0^x + \frac{2n-1}{2} \int_0^x t^{2n-2} h(t) dt$$

$$\boxed{H_{2n}(x) = -\frac{1}{2} x^{2n-1} h(x) + \frac{2n-1}{2} H_{2n-2}(x)}$$

On a : $H_{2n+1}(x) = \int_0^x t^{2n+1} h(t) dt$. Effectuons l'intégration par parties suivante

$$\begin{cases} t^{2n} = u \\ t h(t) dt = dv \end{cases} \iff \begin{cases} 2n t^{2n-1} dt = du \\ -\frac{1}{2} h(t) = v \end{cases}$$

$$H_{2n+1}(x) = \left[-\frac{1}{2} t^{2n} h(t) \right]_0^x + \frac{2n}{2} \int_0^x t^{2n-1} h(t) dt$$

$$\boxed{H_{2n+1}(x) = -\frac{1}{2} x^{2n} h(x) + n H_{2n-1}(x)}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Devoir N°2

Exercice 1

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par :

$$f_1(x) = (4e^{-x} - 6e^{-2x}) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$$

$$f_2(x) = \alpha (6e^{-x} - 6e^{-2x} + 5e^{-3x}) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$$

$$f_3(x) = \beta (4e^{-x} - 30e^{-2x} + 60e^{-3x} - 35e^{-4x}) \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$$

où $\alpha > 0, \beta > 0$ sont des constantes.

1. Montrer que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est orthogonale.
2. Déterminer (α, β) de sorte que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ soit orthonormée.
3. Soit $f(x) = x e^{-5x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$.

Déterminer $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^3 a_i f_i(x)$ avec $a_i = \langle f_i, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) f(x) dx$.

4. Déterminer $\|\hat{f}\|_2^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle$, en déduire $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2$.

on ad met que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0 \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$

Exercice 2

Pour $n \geq 1$ on définit la suite de fonctions f_n par : $f_n(x) = \frac{x}{1 + e^{-2nx}}$.

1. Étudier la convergence ponctuelle de la suite de fonctions f_n .
2. Étudier la convergence au sens de L^2 de la suite de fonctions f_n .

Corrigé de devoir N°2

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_0^\infty f_1(x) f_2(x) dx = 0 \\ \langle f_1, f_3 \rangle &= \int_0^\infty f_1(x) f_3(x) dx = 0 \\ \langle f_2, f_3 \rangle &= \int_0^\infty f_1(x) f_2(x) dx = 0 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \|f_1\|_2^2 &= \langle f_1, f_1 \rangle = \int_0^\infty f_1^2(x) dx = 1 \\ \|f_2\|_2^2 &= \langle f_2, f_2 \rangle = \int_0^\infty f_2^2(x) dx = \frac{61\alpha^2}{6} \\ \|f_3\|_2^2 &= \langle f_3, f_3 \rangle = \int_0^\infty f_3^2(x) dx = \frac{\beta^2}{8} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\alpha = \sqrt{\frac{6}{61}} \text{ et } \beta = \sqrt{8}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle f_1, f \rangle = \int_0^\infty f_1(x) f(x) dx = -\frac{5}{441} \\ a_2 &= \langle f_2, f \rangle = \int_0^\infty f_2(x) f(x) dx = \frac{1151\sqrt{366}}{573888} \\ a_3 &= \langle f_3, f \rangle = \int_0^\infty f_3(x) f(x) dx = \frac{271\sqrt{2}}{31752} \end{aligned}$$

D'où
$$\hat{f}(x) = \frac{633005}{3873744} e^{-x} - \frac{1327871}{1291248} e^{-2x} + \frac{5445305}{2582496} e^{-3x} - \frac{1355}{1134} e^{-4x}$$

4. On a : $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^\infty f^2(x) dx =$

D'où $e^2(\hat{f}) = \|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^3 a_i^2 = 0.00025$

Exercice 2

1. Pour $x = 0$ on a : $f_n(0) = 0$. D'autre part, pour tout $x < 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^{-2nx}) = \infty$, donc pour tout $x < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Pour tout $x > 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + e^{-2nx}) = 1$, donc pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$.

On en déduit que f_n converge simplement vers f où $f(x) = x \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))^2 dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 \left(\frac{x}{1 + e^{-2nx}} \right)^2 dx}_{I_n} + \underbrace{\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{-2nx}} - x \right)^2 dx}_{J_n} \end{aligned}$$

• pour I_n on remarque que pour tout $x < 0$, $1 + e^{-2nx} \geq e^{-2nx}$, donc

$$I_n \leq \int_{-\infty}^0 x^2 e^{4nx} dx \leq \frac{1}{32n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

• pour J_n

$$J_n = \int_0^{\infty} \left(\frac{x e^{-2nx}}{1 + e^{-2nx}} \right)^2 dx$$

on remarque que pour tout $x \geq 0$, $1 + e^{-2nx} \geq 1$, donc

$$J_n \leq \int_0^{\infty} x^2 e^{-4nx} dx \leq \frac{1}{32n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2^2 = 0$.

Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Devoir N°3

Exercice 1

Pour $k \in \mathbb{N}$ on considère les fonctions f_k définies par :

$$f_k(x) = \begin{cases} \cos 2\pi x & \text{si } k \leq x \leq k+1 \\ 1 & \text{si } k+1 \leq x \leq k+2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner les représentations graphiques de f_0 , f_1 et f_2 .
2. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) dx$ ne dépend pas de k .
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de $g_k = f_k * f_{k+1}$.
4. Donner les représentations graphiques de g_0 , g_1 et g_2 .
5. Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) dx$.

Exercice 2

On considère la fonction f_0 définie par : $f_0(x) = e^{2\pi(1-x)} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$.

1. Calculer $E = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx$.

2. Soit f un signal périodique de période $T = 1$, égal à f_0 sur $]0, 1[$.

2.1. Donner la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1, 2]$.

2.2. Calculer $f(0^-)$, $f(0^+)$, $f(1^-)$, $f(1^+)$.

2.3. Déterminer S_f la série de Fourier de f . Préciser tous les types de convergence de S_f .

2.4. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

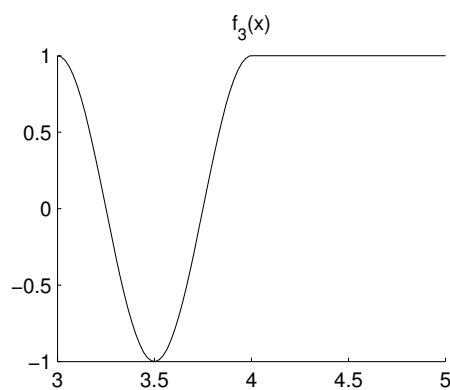
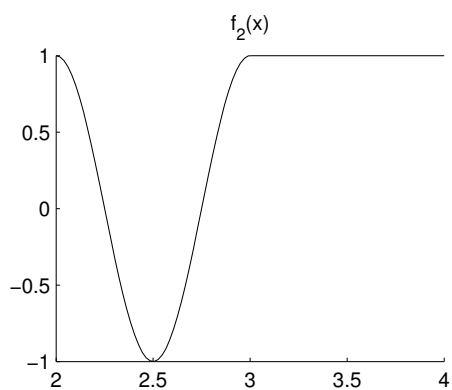
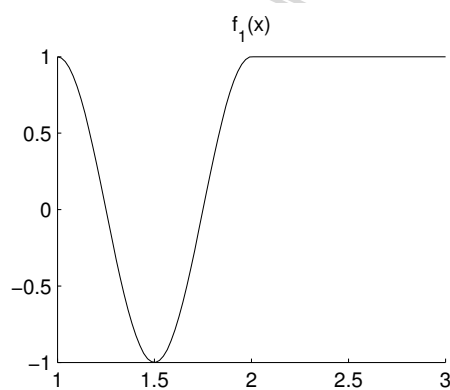
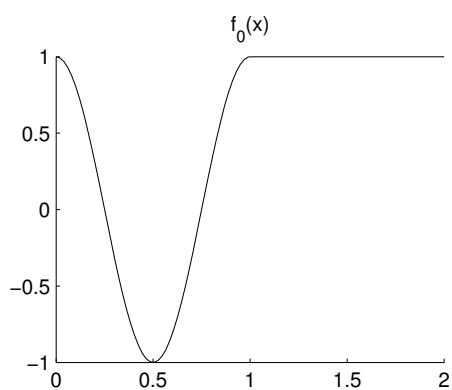
Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Corrigé de devoir N°3

Exercice 1

1. La figure suivante donne les représentations graphiques de f_0 , f_1 , f_2 et f_3 .



2. On a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_k^{k+1} \cos 2\pi x dx + \int_{k+1}^{k+2} dx = \left[\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right]_k^{k+1} + [x]_{k+1}^{k+2} = 1$$

3. Pour $x \in [2k+1, 2k+5]$ on a : $g_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) f_{k+1}(x-t) dt$ avec

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \cos 2\pi t \mathbb{1}_{[k, k+1]}(t) + \mathbb{1}_{[k+1, k+2]}(t) \\ f_{k+1}(x-t) &= \cos 2\pi(x-t) \mathbb{1}_{[k+1, k+2]}(x-t) + \mathbb{1}_{[k+2, k+3]}(x-t) \\ &= \cos 2\pi(x-t) \mathbb{1}_{[x-(k+2), x-(k+1)]}(t) + \mathbb{1}_{[x-(k+3), x-(k+2)]}(t) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} f_k(t) f_{k+1}(x-t) &= \cos 2\pi t \cos 2\pi(x-t) \mathbb{1}_{[k, k+1]}(t) \mathbb{1}_{[x-(k+2), x-(k+1)]}(t) \\ &\quad + \cos 2\pi t \mathbb{1}_{[k, k+1]}(t) \mathbb{1}_{[x-(k+3), x-(k+2)]}(t) \\ &\quad + \cos 2\pi(x-t) \mathbb{1}_{[x-(k+2), x-(k+1)]}(t) \mathbb{1}_{[k+1, k+2]}(t) + \mathbb{1}_{[k+1, k+2]}(t) \mathbb{1}_{[x-(k+3), x-(k+2)]}(t) \end{aligned}$$

On découpe l'intervalle $[2k+1, 2k+5]$ en quatre sous intervalles :

$$[2k+1, 2k+2] , [2k+2, 2k+3] , [2k+3, 2k+4] , [2k+4, 2k+5]$$

d'où on a le tableau suivant :

$x \in$	$[2k + 1, 2k + 2]$	$[2k + 2, 2k + 3]$	$[2k + 3, 2k + 4]$	$[2k + 4, 2k + 5]$
$[k, k + 1] \cap [x - (k + 2), x - (k + 1)]$	$[k, x - (k + 1)]$	$[x - (k + 2), k + 1]$	$\emptyset$	$\emptyset$
$[k, k + 1] \cap [x - (k + 3), x - (k + 2)]$	$\emptyset$	$[k, x - (k + 2)]$	$[x - (k + 3), k + 1]$	$\emptyset$
$[k + 1, k + 2] \cap [x - (k + 2), x - (k + 1)]$	$\emptyset$	$[k + 1, x - (k + 1)]$	$[x - (k + 2), k + 2]$	$\emptyset$
$[k + 1, k + 2] \cap [x - (k + 3), x - (k + 2)]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$[k + 1, x - (k + 2)]$	$[x - (k + 3), k + 2]$

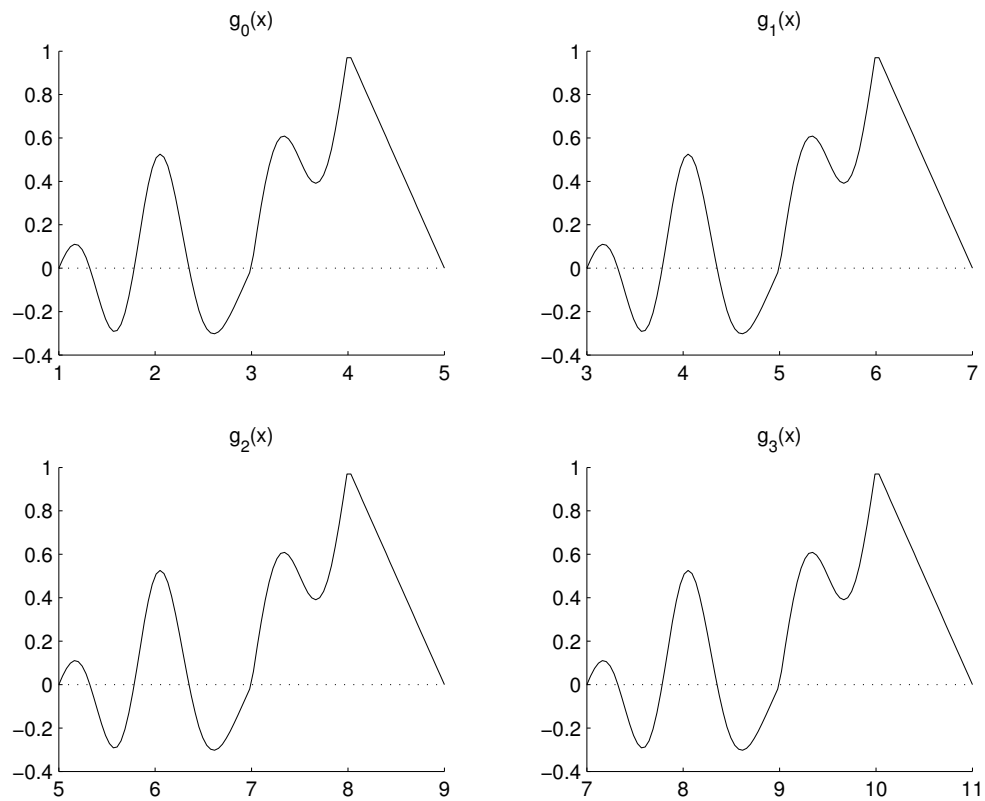
Il vient donc

x	$f_k(t) f_{k+1}(x - t)$
$[2k + 1, 2k + 2]$	$\cos 2\pi t \cos 2\pi(x - t) \mathbb{1}_{[k, x-(k+1)]}(t)$
$[2k + 2, 2k + 3]$	$\cos 2\pi t \cos 2\pi(x - t) \mathbb{1}_{[x-(k+2), k+1]}(t) + \cos 2\pi t \mathbb{1}_{[k, x-(k+2)]}(t) + \cos 2\pi(x - t) \mathbb{1}_{[k+1, x-(k+1)]}(t)$
$[2k + 3, 2k + 4]$	$\cos 2\pi t \mathbb{1}_{[x-(k+3), k+1]}(t) + \cos 2\pi(x - t) \mathbb{1}_{[x-(k+2), k+2]}(t) + \mathbb{1}_{[k+1, x-(k+2)]}(t)$
$[2k + 4, 2k + 5]$	$\mathbb{1}_{[x-(k+3), k+2]}(t)$

d'où

x	$g_k(x) = f_k * f_{k+1}(x)$
$[2k + 1, 2k + 2]$	$\frac{1}{4\pi} \sin 2\pi x + \frac{1}{2} (x - 2k - 1) \cos 2\pi x$
$[2k + 2, 2k + 3]$	$\frac{3}{4\pi} \sin 2\pi x + \frac{1}{2} (2k + 3 - x) \cos 2\pi x$
$[2k + 3, 2k + 4]$	$-\frac{1}{\pi} \sin 2\pi x + (x - 2k - 3)$
$[2k + 4, 2k + 5]$	$2k + 5 - x$

1. La figure suivante donne les représentations graphiques de g_0 , g_1 , g_2 et g_3 .

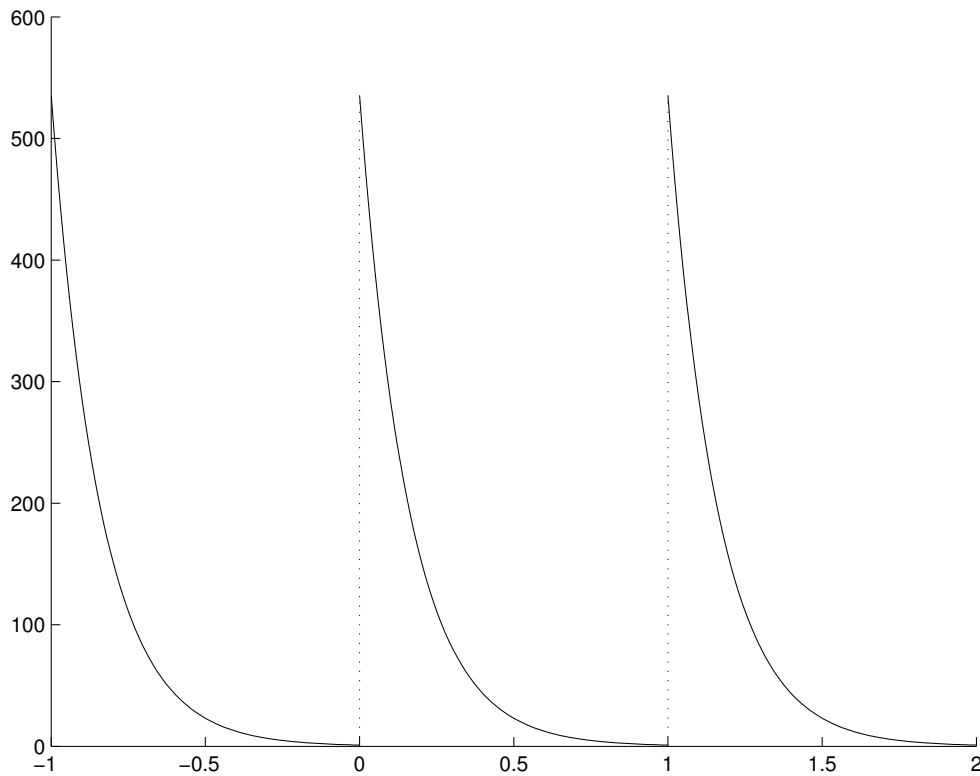


5. On a : $\int_{-\infty}^{\infty} g_k(x) dx = 1$

Exercice 2

1. On a : $E = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^2(x) dx = \frac{e^{4\pi} - 1}{4\pi}$.

2.1. Pour la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-1, 2]$, on a la figure suivante :



2.2. On a :

$$\begin{aligned} f(0^-) &= e^{2\pi(0)} = 1 & , & \quad f(0^+) = e^{2\pi(1-0)} = e^{2\pi} \\ f(1^-) &= e^{2\pi(1-1)} = 1 & , & \quad f(1^+) = e^{2\pi(2-1)} = e^{2\pi} \end{aligned}$$

2.3. Les coefficients complexes de Fourier de f sont définis par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} dx = \int_0^1 e^{2\pi(1-x)} e^{-2i\pi nx} dx$$

On a : $a_0 = c_0 = \int_0^1 e^{2\pi(1-x)} dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}.$

pour $n \neq 0$, on a :

$$c_n = \int_0^1 e^{2\pi(1-x)} e^{-2i\pi nx} dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2i\pi n}}{2\pi(1 + in)} = \frac{(e^{2\pi} - 1)(1 - in)}{2\pi(1 + n^2)}$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = c_n + c_{-n} = \frac{(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1 + n^2)}$$

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(1 + n^2)}$$

D'où la série de Fourier de f :

$$S_f(x) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{1 + n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2\pi nx}{1 + n^2} \right)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$S_f(x) = \frac{-e^{2\pi} + 1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{1 + n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \sin 2\pi nx}{1 + n^2} \right)$$

On remarque que :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nx}{1 + n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2\pi nx}{1 + n^2}$ est une série alternée. On en déduit que S_f est convergente.

2.4. Pour calculer la somme S_1 , on remarque que $S_f(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{e^{2\pi} + 1}{2}$. On en déduit

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \coth \pi$$

Pour calculer la somme S_2 , on remarque que f est continue en $\frac{1}{2}$, donc $S_f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = e^{\pi}$. On en déduit

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi e^{\pi}}{e^{2\pi} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Devoir N°4

Exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, on définit I_n par : $I_n(\omega, a, b) = \int_a^b x^n e^{-i\omega x} dx$.

Déterminer l'expression de $I_0(\omega, a, b)$. Exprimer $I_n(\omega, a, b)$ en fonction $I_{n-1}(\omega, a, b)$. En déduire $I_1(\omega, a, b)$ et $I_2(\omega, a, b)$.

2. on considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. Déterminer $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier de f .

2.2. Déterminer la densité spectrale d'énergie de f .

Exercice 2

Soit $f(x) = e^{-|x|}$.

1. Déterminer $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier de f .

2. Déterminer la densité spectrale d'énergie de f .

3. Pour $\lambda > 0$ on pose : $g_\lambda(x) = \frac{1}{2} (f(x+\lambda) + f(x-\lambda))$.

3.1. Déterminer $\mathcal{G}_\lambda$ la transformée de Fourier de g_λ .

3.2. Déterminer la densité spectrale d'énergie de g_λ .

Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Corrigé de devoir N°4

Exercice 1

1. On a :

$$I_0(\omega, a, b) = \int_a^b e^{-i\omega x} dx = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

Pour $n \geq 1$, on a : $I_0(\omega, a, b) = \int_a^b x^n e^{-i\omega x} dx$. Effectuons l'intégration par parties suivante :

$$\begin{cases} x^n = u \\ e^{-i\omega x} dx = dv \end{cases} \iff \begin{cases} n x^{n-1} dx = du \\ \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} = v \end{cases}$$

On obtient donc :

$$I_n(\omega, a, b) = \frac{a^n e^{-i\omega a} - b^n e^{-i\omega b}}{i\omega} + \frac{n}{i\omega} I_{n-1}(\omega, a, b)$$

On en déduit :

$$I_1(\omega, a, b) = \frac{a e^{-i\omega a} - b e^{-i\omega b}}{i\omega} - \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{\omega^2}$$

$$I_2(\omega, a, b) = \frac{a^2 e^{-i\omega a} - b^2 e^{-i\omega b}}{i\omega} + \frac{2(b e^{-i\omega b} - a e^{-i\omega a})}{\omega^2} + \frac{2(e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a})}{i\omega^3}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &= \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{(x+1)^2}{2} e^{-2i\pi\nu x} dx}_{J_1} + \int_0^1 \left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ &\quad + \underbrace{\int_1^2 \frac{(x-2)^2}{2} e^{-2i\pi\nu x} dx}_{J_2}\end{aligned}$$

Dans J_1 , en effectuant le changement de variable $t = x + 1$, on obtient :

$$J_1 = \frac{e^{2i\pi\nu}}{2} \int_0^1 t^2 e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{e^{2i\pi\nu}}{2} I_2(2\pi\nu, 0, 1)$$

Dans J_2 , en effectuant le changement de variable $t = 2 - x$, on obtient :

$$J_2 = \frac{e^{-4i\pi\nu}}{2} \int_0^1 t^2 e^{2i\pi\nu t} dt = \frac{e^{-4i\pi\nu}}{2} I_2(-2\pi\nu, 0, 1)$$

D'autre part, on a :

$$\int_0^1 \left(-x^2 + x + \frac{1}{2}\right) e^{-2i\pi\nu x} dx = -I_2(2\pi\nu, 0, 1) + I_1(2\pi\nu, 0, 1) + \frac{1}{2} I_0(2\pi\nu, 0, 1)$$

Il vient donc :

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = \frac{3e^{-2i\pi\nu} - 3 + e^{2i\pi\nu} - e^{-4i\pi\nu}}{(2i\pi\nu)^3} = e^{-i\pi\nu} \frac{2i(\sin 3\pi\nu - 3\sin \pi\nu)}{(2i\pi\nu)^3}$$

En tenant compte de : $\sin^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{2i(\sin 3\theta - 3\sin \theta)}{(2i)^3}$

on obtient : $\mathcal{F}(f)(\nu) = e^{-i\pi\nu} \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^3$

On a : $|\mathcal{F}(f)(\nu)|^2 = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^6$

Exercice 2

1. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu x - |x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-2i\pi\nu x + x} dx + \int_0^{\infty} e^{-2i\pi\nu x - x} dx \\ &= \frac{1}{1 - 2i\pi\nu} + \frac{1}{1 + 2i\pi\nu} = \frac{2}{1 + 4\pi^2\nu^2}\end{aligned}$$

2. On a :

$$|\mathcal{F}(f)(\nu)|^2 = \frac{4}{(1 + 4\pi^2\nu^2)^2}$$

3. Notons $g_1(x) = f(x + \lambda)$ et $g_2(x) = f(x - \lambda)$. On a donc $g_\lambda(x) = \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2}$.

3.1. On a : $\mathcal{F}(g_1)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \lambda) e^{-2i\pi\nu x} dx$

En effectuant le changement de variable $t = x + \lambda$, on obtient :

$$\mathcal{F}(g_1)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu(t-\lambda)} dx = e^{2i\pi\nu\lambda} \mathcal{F}(f)(\nu) = \frac{2 e^{2i\pi\nu\lambda}}{1 + 4\pi^2\nu^2}$$

De même, on a : $\mathcal{F}(g_2)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \lambda) e^{-2i\pi\nu x} dx$

En effectuant le changement de variable $t = x - \lambda$, on obtient :

$$\mathcal{F}(g_2)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu(t+\lambda)} dx = e^{-2i\pi\nu\lambda} \mathcal{F}(f)(\nu) = \frac{2 e^{-2i\pi\nu\lambda}}{1 + 4\pi^2\nu^2}$$

On en déduit : $\mathcal{F}(g)(\nu) = \frac{2 \cos 2\pi\nu\lambda}{1 + 4\pi^2\nu^2}$

3.2. On a : $|\mathcal{F}(g)(\nu)|^2 = \frac{4 \cos^2 2\pi\nu\lambda}{(1 + 4\pi^2\nu^2)^2}$

Devoir N°5

Soient f et g deux fonctions réelles admettant les transformées de Laplace F et G .

Pour $t \geq 0$ et $\lambda > 0$, on pose : $k_\lambda(t) = f(t) e^{-\lambda t}$ et $s_\lambda(t) = g(t) e^{-\lambda t}$.

1. Exprimer K_λ et S_λ les transformées de Laplace de k_λ et s_λ en fonction de F et G .

2. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$ on pose :

$$h_{a,\omega}(t) = \cos(at) e^{-\omega t} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t) \quad , \quad z_{a,\omega}(t) = \sin(at) e^{-\omega t} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$$

et on admet que $h_{a,\omega}$ et $z_{a,\omega}$ ont pour transformées de Laplace :

$$H_{a,\omega}(p) = L(h_{a,\omega})(p) = \frac{p + \omega}{a^2 + (p + \omega)^2} \quad , \quad Z_{a,\omega}(p) = L(z_{a,\omega})(p) = \frac{a}{a^2 + (p + \omega)^2}$$

Pour $t \geq 0$, on considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) + f(t) e^{-t} \\ y'(t) = x(t) - y(t) + g(t) e^{-t} \end{cases} \quad \boxed{\text{E}}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

2.1. En utilisant la transformée de Laplace résoudre le système $\boxed{\text{E}}$

2.2. **Application.** on donne $f(t) = \cos t \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$ et $g(t) = \sin t \mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)$

Corrigé de devoir N°5

1. On a :

$$K_\lambda(p) = \int_0^\infty k_\lambda(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(\lambda+p)t} dt = F(\lambda + p)$$

De même :

$$S_\lambda(p) = \int_0^\infty s_\lambda(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty g(t) e^{-(\lambda+p)t} dt = G(\lambda + p)$$

2. Notons : X et Y les transformées de Laplace de x et y .

2.1. En prenant la transformée de Laplace du système **E**, on obtient :

$$\begin{cases} pX(P) - x(0) = -X(p) - Y(p) + K_1(p) \\ pY(P) - y(0) = X(p) - Y(p) + S_1(p) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (p+1)X(P) = 1 - Y(p) + F(p+1) \\ (p+1)Y(P) = X(p) + G(p+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(P) = \frac{1}{p+1} - \frac{Y(p)}{p+1} + \frac{F(p+1)}{p+1} \\ Y(P) = \frac{X(p)}{p+1} + \frac{G(p+1)}{p+1} \end{cases}$$

En emportant la deuxième équation dans la première on obtient :

$$\begin{cases} X(P) = \frac{p+1}{1+(p+1)^2} - \frac{G(p+1)}{1+(p+1)^2} + \frac{p+1}{1+(p+1)^2} F(p+1) \\ Y(P) = \frac{X(p)}{p+1} + \frac{G(p+1)}{p+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(P) = \frac{p+1}{1+(p+1)^2} - \frac{G(p+1)}{1+(p+1)^2} + \frac{p+1}{1+(p+1)^2} F(p+1) \\ Y(P) = \frac{1}{1+(p+1)^2} + \frac{p+1}{1+(p+1)^2} G(p+1) + \frac{F(p+1)}{1+(p+1)^2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x(t) = h_{1,1}(t) - z_{1,1} * s_1(t) + h_{1,1} * k_1(t) \\ y(t) = z_{1,1}(t) + h_{1,1} * s_1(t) + z_{1,1} * k_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t e^{-t} - z_{1,1} * s_1(t) + h_{1,1} * k_1(t) \\ y(t) = \sin t e^{-t} + h_{1,1} * s_1(t) + z_{1,1} * k_1(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} z_{1,1} * s_1(t) = e^{-t} \int_0^t \sin x g(t-x) dx \\ h_{1,1} * k_1(t) = e^{-t} \int_0^t \cos x f(t-x) dx \\ h_{1,1} * s_1(t) = e^{-t} \int_0^t \cos x g(t-x) dx \\ z_{1,1} * k_1(t) = e^{-t} \int_0^t \sin x f(t-x) dx \end{cases}$$

2.2. Application

$$\begin{cases} z_{1,1} * s_1(t) = \frac{1}{2} (-t \cos t + \sin t) e^{-t} \\ h_{1,1} * k_1(t) = \frac{1}{2} (t \cos t + \sin t) e^{-t} \\ h_{1,1} * s_1(t) = -\frac{1}{2} t \sin t e^{-t} \\ z_{1,1} * k_1(t) = \frac{1}{2} t \sin t e^{-t} \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\begin{cases} x(t) = (1+t) \cos t e^{-t} \\ y(t) = \sin t e^{-t} \end{cases}$$

Mathématique du Signal Déterministe

2003-2004

Devoir N°6

Exercice 1

On considère la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} (3+x)^2 & \text{si } -3 \leq x \leq -\theta \\ (3-\theta)^2 & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta \\ (3-x)^2 & \text{si } \theta \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $0 < \theta < 3$.

1. Déterminer $[f_0]'$, $[f_0]''$ et $[f_0]'''$.
2. Déterminer la transformée de Fourier de f_0 .
3. Soit f une fonction périodique de période $T = 6$, égale à f_0 sur $[-3, 3]$. Déterminer le développement en série de Fourier de f .

Exercice 2

Pour $n \geq 1$, on considère le signal f_n défini par : $f_n(x) = \frac{2(x+n)}{2n+1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

1. Étudier la convergence ponctuelle de f_n .
2. Étudier la convergence au sens des distributions de $[f_n]$.
3. On pose : $g_n(x) = f_n(x-n)$ et $h_n = f_n * g_n$.
- 3.1. Déterminer l'expression de h_n .

Corrigé de devoir N°6

Exercice 1

On remarque que f_0 est continue, donc $[f_0]' = [f_0']$ avec

$$f_0'(x) = \begin{cases} 2(3+x) & \text{si } -3 \leq x < -\theta \\ -2(3-x) & \text{si } \theta < x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a : $[f_0]'' = [f_0''] + \Delta f_0'(-\theta) \delta_{\{-\theta\}} + \Delta f_0'(\theta) \delta_{\{\theta\}}$; or ,

$$\Delta f_0'(-\theta) = -2(3-\theta) \text{ et } \Delta f_0'(\theta) = -2(3-\theta)$$

$$[f_0]'' = [f_0''] - 2(3-\theta) \delta_{\{-\theta\}} - 2(3-\theta) \delta_{\{\theta\}} \quad \text{avec}$$

$$f_0''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -3 < x < -\theta \\ 2 & \text{si } \theta < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} [f_0]''' &= [f_0'''] - 2(3-\theta) \delta'_{\{-\theta\}} - 2(3-\theta) \delta'_{\{\theta\}} + \Delta f_0''(-3) \delta_{\{-3\}} \\ &\quad + \Delta f_0''(-\theta) \delta_{\{-\theta\}} + \Delta f_0''(\theta) \delta_{\{\theta\}} + \Delta f_0''(3) \delta_{\{3\}} \end{aligned}$$

or, $f_0'''(x) = 0$, $\Delta f_0''(-3) = 2$, $\Delta f_0''(-\theta) = -2$, $\Delta f_0''(\theta) = 2$ et $\Delta f_0''(3) = -2$.

$$[f_0]''' = -2(3-\theta) \delta'_{\{-\theta\}} - 2(3-\theta) \delta'_{\{\theta\}} + 2 \delta_{\{-3\}} - 2 \delta_{\{-\theta\}} + 2 \delta_{\{\theta\}} - 2 \delta_{\{3\}}$$

On a : $\mathcal{F}([f_0]''')(\nu) = (2i\pi\nu)^3 \mathcal{F}([f_0])(\nu)$ avec

$$\mathcal{F}([f_0]''')(\nu) = -2(3-\theta) (4i\pi\nu) \cos 2\pi\nu\theta + 4i \sin 6\pi\nu - 4i \sin 2\pi\nu\theta$$

On en déduit :

$$\mathcal{F}([f_0])(\nu) = \frac{1}{(2\pi\nu)^3} (8\pi\nu(3-\theta) \cos 2\pi\nu\theta - 4 \sin 6\pi\nu + 4 \sin 2\pi\nu\theta)$$

Les coefficients complexes de Fourier de f sont donnés par : $\forall k \in \mathbb{Z}, c_k = \frac{1}{6} \mathcal{F}([f_0])\left(\frac{k}{6}\right)$

Donc, pour $k \in \mathbb{Z}^*$ on a :

$$c_k = \frac{18}{(k\pi)^3} \left[\frac{3-\theta}{3} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{3}\right) + \sin\left(\frac{k\pi\theta}{3}\right) \right]$$

D'autre part, on a :

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 f_0(x) dx = \frac{2\theta^3 - 9\theta^2 + 27}{9}$$

Exercice 2

1. On a : $\forall x, f'_n(x) = \frac{2}{2n+1} > 0$; d'autre part : $f_n(0) = 1 - \frac{1}{2n+1}$ et $f_n(1) = 1 + \frac{1}{2n+1}$, on en déduit :

$$\forall x, 1 - \frac{1}{2n+1} \leq f_n(x) \leq 1 + \frac{1}{2n+1}$$

Donc $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ avec $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

2. Pour étudier la convergence au sens des distributions de $[f_n]$, étudions la convergence au sens de $L^2([0,1])$ de f_n ce qui entraînera la convergence au sens des distributions de $[f_n]$. On a :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{2(x+n)}{2n+1} - 1 \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{3(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_2 = 0$, on en déduit : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f$ et donc $[f_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}'} [f]$.

3. On a : $g_n(x) = f_n(x-n) = \frac{2(x-n+n)}{2n+1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-n) = \frac{2x}{2n+1} \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$. Donc pour

tout $x \in [n, n+2]$, on a :

$$\begin{aligned}
 h_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x-t) g_n(t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(x-t+n)}{2n+1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) \frac{2t}{2n+1} \mathbb{1}_{[n,n+1]}(t) dt \\
 &= \frac{4}{(2n+1)^2} \int_{\sup\{n, x-1\}}^{\inf\{n+1, x\}} t(x-t+n) dt \\
 &= \begin{cases} \frac{2(x-n)(x^2+n^2+4nx)}{3(2n+1)^2} & \text{si } n \leq x \leq n+1 \\ \frac{2(n+2-x)(x^2+n^2+4nx+2x-2n-2)}{3(2n+1)^2} & \text{si } n+1 \leq x \leq n+2 \end{cases}
 \end{aligned}$$