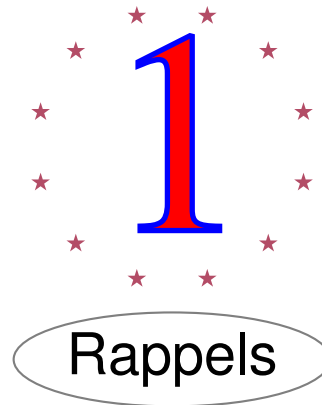




Exercice 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1+x^2}{x(1+x^3)} \quad f_2(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$f_3(x) = x^2 \operatorname{Arctan} x \quad f_4(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f_5(x) = x^2 \ln(1+e^x) \quad f_6(x) = \frac{x+e^{-x}}{1+x}$$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles paires ou impaires ?

$$f_1(x) = \frac{x^2-1}{x^4-1} \quad f_2(x) = 1-|x|$$

$$f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad f_4(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f_5(x) = \frac{\sin x}{x} \quad f_6(x) = \frac{\cos x}{1-x^2}$$

$$f_7(x) = e^{-|x|} \quad f_8(x) = |x|e^{-x^2}$$

$$f_9(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - e^{-x}} \quad f_{10}(x) = \frac{\sin x}{e^{2x} + e^{-x}}$$

Exercice 3 Pour $i = 1, 2, 3, 4$, déterminer la plus petite période T de f_i et puis calculer $f_i(x + \frac{T}{2})$ et $f_i(x - \frac{T}{2})$:

$$f_1(x) = \cos(2x)$$

$$f_2(x) = \sin x + \cos x$$

$$f_3(x) = \ln(1 + \cos^2 x)$$

$$f_4(x) = \cos x \ln(1 + \sin^2 x)$$

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$$

$$I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(|x|) dx \quad I_4 = \int_0^{2\pi} |\cos 2x| dx$$

$$I_5 = \int_{-4}^5 e^{-|x-2|} dx \quad I_6 = \int_{-2}^2 |x+1| dx$$

Exercice 5 En utilisant le changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (u = 1+x^2)$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx \quad (u = \sin x)$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (u = \sqrt{x})$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^4} dx \quad (u = \frac{x}{1+x})$$

$$I_5 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^4} \quad (x = \tan u)$$

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx \quad (x = \tan u)$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (u = \sqrt{x})$$

$$I_8 = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad (u = e^{-x})$$

$$I_9 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x dx}{1+e^x} \quad (u = e^x)$$

Exercice 6 En effectuant l'intégration par parties indiquée calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_e^3 \ln x \, dx \quad (u = \ln x, \, dv = dx)$$

$$I_2 = \int_e^4 x \ln x \, dx \quad (u = \ln x, \, dv = x \, dx)$$

$$I_3 = \int_0^\infty x e^{-x} \, dx \quad (u = x, \, dv = e^{-x} \, dx)$$

$$I_4 = \int_0^\pi x \sin x \, dx \quad (u = x, \, dv = \sin x \, dx)$$

$$I_5 = \int_0^\pi x \cos(2x) \, dx \quad (u = x, \, dv = \cos(2x) \, dx)$$

$$I_6 = \int_0^\infty e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) \, dx \quad (u = \ln(1 + e^{-x}), \, dv = e^{-x} \, dx)$$

$$I_7 = \int_0^\infty e^{-x} \cos x \, dx \quad (u = \cos x, \, dv = e^{-x} \, dx)$$

$$I_8 = \int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx \quad (u = \sin x, \, dv = e^{-x} \, dx)$$

Exercice 7 Pour $i = 1, \dots, 4$ décomposer en éléments simples les fractions rationnelles F_i puis calculer les intégrales $I_i = \int_0^\infty F_i(x) \, dx$

$$F_1(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$F_3(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x^2+7x+12)}$$

$$F_4(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2(1+x^2)}$$

Exercice 8 (*Fonction indicatrice*)

Pour tout intervalle A on définit la fonction indicatrice de A par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que l'on a : $\mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$

Exercice 9

- si $f(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) \mathbb{1}_{A_i}(x)$, on a :

$$\int_C f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{A_i \cap C} g_i(x) dx$$

Pour $i = 1, \dots, 4$ on définit les fonctions f_i par :

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin \pi x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \cos 2x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \frac{\cos x}{1 + \sin x} & \text{si } \pi < x < 2\pi \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{4}{1+x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ (1+x)e^{-2(x-1)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer les fonctions F_i définies par : $F_i(x) = \int_{-\infty}^x f_i(t) dt$. En déduire $F'_i(x)$

Exercice 10 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1 + x^2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sin x - \cos x}$$

Réponses

$$\frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 11 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'(t) + 2y(t) = 0 \quad (y(0) = 1)$

2) $2y'(t) - y(t) = 1 \quad (y(0) = 2)$

3) $5y'(t) - 5y(t) = t \quad (y(0) = 0)$

4) $y'(t) + 2y(t) = \cos t \quad (y(0) = 7/5)$

5) $y''(t) + 5y'(t) - 6y(t) = 1 \quad (y(0) = 2, y'(0) = 1)$

6) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = e^{-t} \quad (y(0) = 1, y'(0) = -1)$

7) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t} \quad (y(0) = -1, y'(0) = 3)$

8) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \cos t e^{-2t} \quad (y(0) = 2, y'(0) = 1)$

9) $y''(t) + y(t) = 2e^{-t} \quad (y(0) = 0, y'(0) = 3)$

10) $y''(t) + y'(t) = 4 \cos t \quad (y(0) = 1, y'(0) = 1)$

Réponses

1) $y(t) = e^{-2t}$

2) $y(t) = 1 + e^{\frac{t}{2}}$

3) $y(t) = \frac{e^t - t - 1}{5}$

4) $y(t) = \frac{2 \cos t + \sin t}{2} + e^{-2t}$

5) $y(t) = \frac{e^{-6t} - 1}{6} + 2e^t$

6) $y(t) = \frac{7}{10} e^{-3t} + \frac{7}{15} e^{2t} - \frac{1}{6} e^{-t}$

7) $y(t) = \frac{t^2 + 4t - 2}{2} e^{-t}$

8) $y(t) = (5t + 3 - \cos t) e^{-2t}$

9) $y(t) = 4 \sin t - \cos t + e^{-t}$

10) $y(t) = 2 + 2 \sin t - 2 \cos t + e^{-t}$



Exercice 1 Les fonctions suivantes appartiennent-elles à $L^2(I)$ (préciser l'intervalle (I)) ?

$$f_1(x) = e^{-|x|}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_3(x) = e^{-x^2}$$

$$f_4(x) = |x| e^{-|x|}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \quad f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \quad f_8(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$$

Exercice 2 Étudier la convergence ponctuelle des suites de fonctions suivantes :
 $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$1) f_n(x) = x^n \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

$$2) f_n(x) = x e^{-nx} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

$$3) f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$$

$$4) f_n(x) = n^2 x \mathbb{I}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$$

$$5) f_n(x) = (1 - n|x|) \mathbb{I}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$$

$$6) f_n(x) = nx e^{-nx} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

$$7) f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$8) f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-x^2}$$

$$9) f_n(x) = n \cos\left(\frac{\pi nx}{2}\right) \mathbb{I}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)$$

$$10) f_n(x) = x^{2n} \ln x \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

Exercice 3 Étudier la convergence au sens de L^2 des suites de fonctions suivantes :
 $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$1) f_n(x) = x^n \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$$

$$2) f_n(x) = \left(1 - \frac{|x|}{n}\right) \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

$$3) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

$$4) f_n(x) = x^2 e^{-nx} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

$$5) f_n(x) = x^\alpha e^{-nx} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x) \quad (\alpha > 0)$$

$$6) f_n(x) = nx e^{-nx} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

$$7) f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x) \quad (\alpha > 0)$$

$$8) f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2 x^2}$$

$$9) f_n(x) = n^{-\alpha} e^{-nx^2} \quad (\alpha > 0)$$

$$10) f_n(x) = \frac{x}{n} \cos(n\pi x) \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$



Projection et famille dans L^2

(famille orthogonale)

- On dit que la famille $\{(e_i)_i\}$ forme une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ si :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e_i(x) e_j(x) dx = 0 \quad \forall i \neq j$$

Toute approximation d'une fonction f par la famille orthogonale $(e_i)_i$ s'écrit :

$$\hat{f}(x) = \sum_i a_i e_i(x) \quad \text{avec} \quad a_i = \langle f, e_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_i(x) dx.$$

- erreur de l'approximation : $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2 = \langle f - \hat{f}, f - \hat{f} \rangle$

(famille orthonormée)

- On dit que la famille $\{(e_i)_i\}$ forme une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ si :

$$\begin{cases} \|e_i\|_2^2 = \langle e_i, e_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e_i^2(x) dx = 1 \quad \forall i \\ \langle e_i, e_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e_i(x) e_j(x) dx = 0 \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

Toute approximation d'une fonction f par la famille orthonormée $(e_i)_i$ s'écrit :

$$\hat{f}(x) = \sum_i a_i e_i(x) \quad \text{avec} \quad a_i = \langle f, e_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_i(x) dx.$$

- erreur de l'approximation : $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2 = \langle f - \hat{f}, f - \hat{f} \rangle$

Exercice 1 Pour $n = 0, 1, 2$, on considère les polynômes $p_n(x)$ de degré n dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

1. Déterminer les polynômes $p_n(x)$ de sorte qu'ils forment une famille orthonormée de $L^2(-1, 1)$.
2. Soit $f(x) = e^x \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Déterminer la meilleure approximation au sens de l'énergie de f par cette famille.

Exercice 2 On considère les polynômes :

$$P_1(x) = \sqrt{2} e^{-x}, \quad P_2(x) = -4 e^{-x} + 6 e^{-2x}, \quad P_3(x) = 3\sqrt{6} e^{-x} - 12\sqrt{6} e^{-2x} + 10\sqrt{6} e^{-3x}$$

1. Montrer que $\{P_1, P_2, P_3\}$ forment une famille orthonormée de $L^2(0, \infty)$.
2. Soit $f(x) = e^{-4x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$. Déterminer la $\hat{f}$ meilleure approximation au sens de l'énergie de f par cette famille.
3. Déterminer $\|\hat{f}\|_2^2$, en déduire $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2$.

Exercice 3 Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$, on considère la famille

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \right\}$$

Montrer que cette famille de fonctions forment une famille orthonormée de $L^2(0, T)$.

Exercice 4 Pour $\theta > 0$, on considère les fonctions :

$$L_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \mathbb{1}_{[-i\theta, -(i-1)\theta]}(x), \quad R_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \mathbb{1}_{[(i-1)\theta, i\theta]}(x) \quad \forall i \geq 1$$

1. Montrer que la famille $\{(L_i)_{i \geq 1}, (R_i)_{i \geq 1}\}$ forme une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.
2. Soit $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Déterminer $\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i L_i(x) + b_i R_i(x))$ avec $a_i = \langle f, L_i \rangle$ et $b_i = \langle f, R_i \rangle$.
3. Déterminer $\|\hat{f}\|_2^2$, en déduire $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2$. Peut-on trouver θ_0 de sorte que $e(\hat{f}) = 0$?

Exercice 5 Soit $f_0(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{13} & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{3}{13} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2+x}{13} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

et pour $i \geq 1$, $R_i(x) = f_0(x - 4i)$ et $L_i(x) = f_0(x + 4i)$.

1. Montrer que la famille $\{f_0, (L_i)_{i \geq 1}, (R_i)_{i \geq 1}\}$ forme une famille orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$.

2. Soit $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Déterminer $\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i L_i(x) + b_i R_i(x))$ avec $a_0 = \langle f, f_0 \rangle$, $a_i = \langle f, L_i \rangle$ et $b_i = \langle f, R_i \rangle$.

3. Déterminer $\|\hat{f}\|_2^2$, en déduire $e(\hat{f}) = \|f - \hat{f}\|_2^2$.

On admet les résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta^k = \frac{\eta}{1-\eta} \quad \forall |\eta| < 1$$

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}} \quad \forall a > 0, \forall k \in \mathbb{N}$$



Séries de Fourier

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes :

- a) déterminer S_f la série de Fourier de f .
- b) étudier la convergence de S_f vers f .
- c) pour p donné, on désigne par h_p l'harmonique d'ordre p tel que :

$$h_p(x) = a_p \cos\left(\frac{2\pi p x}{T}\right) + b_p \sin\left(\frac{2\pi p x}{T}\right)$$

on désigne par : $s_p = h_0 + h_1 + \dots + h_p$ la somme des $p + 1$ harmoniques et on désigne par E_p l'énergie de s_p définie par :

$$E_p = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^p (a_n^2 + b_n^2)$$

Combien d'harmoniques faut-il sommer pour que l'on ait une énergie au moins égale à 95% de E ?

- 1) $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2]$, de période $T = 2$
- 2) $f(x) = |x|$ pour $x \in [0, 3]$, de période $T = 3$
- 3) $f(x) = |\sin x|$ pour $x \in [0, 2\pi]$, de période $T = 2\pi$
- 4) $f(x) = e^x$ pour $x \in [0, 2\pi]$, de période $T = 2\pi$
- 5) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -2 < x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$ de période $T = 4$

$$6) f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases} \quad \text{de période } T = 4$$

$$7) f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{de période } T = 2$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 - \cos \pi x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{de période } T = 2$$

$$9) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 5-x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \text{de période } T = 4$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad \text{de période } T = 4$$

$$11) f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases} \quad \text{de période } T = 3$$

Exercice 2 Soit f un signal périodique, de période T , défini par :

$$f(x) = x(T - x) \text{ sur } [0, T].$$

2.1. Déterminer les expressions de $f(x + T)$ et de $f(x - T)$.

2.2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow T} f(x)$. f est-elle continue?

2.3. Déterminer S_f la série de Fourier de f .

2.4. Étudier la convergence de S_f vers f .

2.5. Vérifier la formule de Parseval.

2.6. Déterminer l'expression de f' . En déduire les expressions de $f'(x + T)$ et de $f'(x - T)$.

2.7. Calculer $\lim_{x \rightarrow T} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{T}{2}} f'(x)$. f' est-elle continue?

2.8. Déterminer $S_{f'}$ la série de Fourier de f' .

2.9. Étudier la convergence de $S_{f'}$ vers f' .

Exercice 3 Soit f un signal périodique, de période T , défini par :

$$f(x) = x \left(x - \frac{T}{2}\right) (T - x) \text{ sur } [0, T].$$

3.1. Déterminer les expressions de $f(x + T)$ et de $f(x - T)$.

3.2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow T} f(x)$. f est-elle continue?

3.3. Déterminer S_f la série de Fourier de f .

3.4. Étudier la convergence de S_f vers f .

3.5. Vérifier la formule de Parseval.

3.6. Déterminer l'expression de f' . En déduire les expressions de $f'(x + T)$ et de $f'(x - T)$. f' est-elle continue?

3.7. Déterminer $S_{f'}$ la série de Fourier de f' .

3.8. Étudier la convergence de $S_{f'}$ vers f' .

3.9. Déterminer l'expression de f'' . En déduire les expressions de $f''(x + T)$ et de $f''(x - T)$. f'' est-elle continue?

3.10. Déterminer $S_{f''}$ la série de Fourier de f'' .

3.11. Étudier la convergence de $S_{f''}$ vers f'' .

Exercice 4 Soit f et g deux signaux périodiques, de période $T = 2\pi$, définis par : $f(x) = \sup(0, \cos x)$ sur $[0, T]$ et $g(x) = \sup(0, \sin x)$ sur $[0, T]$.

Déterminer S_f la série de Fourier de f . En déduire S_g la série de Fourier de g .

On admet les résultats suivants :

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax + ax \sin ax}{a^2}$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax - ax \cos ax}{a^2}$$

$$\int x(b-x) \sin ax \, dx = \frac{a(b-2x) \sin ax + (a^2x^2 - ba^2x - 2) \cos ax}{a^3}$$

$$\int x(b-x) \cos ax \, dx = \frac{a(b-2x) \cos ax + (a^2bx - a^2x + 2) \sin ax}{a^3}$$



Produit de convolution

Déterminer $f * g$ si :

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$f(x) = \cos x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$g(x) = \sin x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$f(x) = \cos x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$g(x) = \cos x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$f(x) = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty]}(x) \quad (\lambda > 0)$$

$$g(x) = e^{-\mu x} \mathbb{1}_{[0, \infty]}(x) \quad (\mu > 0)$$

$$f(x) = \sin x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$g(x) = \sin x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$f(x) = \sin x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$g(x) = x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$f(x) = |\sin x| \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$g(x) = x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$f(x) = |\cos x| \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$g(x) = x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$f(x) = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty]}(x) \quad (\lambda > 0)$$

$$g(x) = x \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$f(x) = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty]}(x) \quad (\lambda > 0)$$

$$g(x) = \cos x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$f(x) = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty]}(x) \quad (\lambda > 0)$$

$$g(x) = \sin x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$g(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$g(x) = \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x)$$

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$g(x) = \sin x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$g(x) = e^{-|x|}$$

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$g(x) = e^{-x^2}$$

$$f(x) = e^{-|x|}$$

$$g(x) = e^{-|x|}$$

$$f(x) = e^{-|x|}$$

$$g(x) = \sin x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$f(x) = e^{-|x|}$$

$$g(x) = \cos x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \cos x \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}(x)$$

$$g(x) = \mathbb{1}_{[0, \pi]}(x)$$



Transformée de Fourier

Exercice 1 Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes:

$$1) f(x) = \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

$$2) f(x) = x \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

$$3) f(x) = \sin(2\pi x) \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

$$4) f(x) = \cos(2\pi x) \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$$

$$5) f(x) = e^{-|x|}$$

$$6) f(x) = \mathbb{I}_{[-1,1]}(x) + x \mathbb{I}_{[1,2]}(x)$$

$$7) f(x) = e^{-x} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

$$8) f(x) = \sin(2\pi x) e^{-2\pi x} \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)$$

Exercice 2 Soit f une fonction réelle admettant la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

2.1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on définit les fonctions g_θ , h_σ et $\psi_{\theta,\sigma}$ par :

$$g_\theta(x) = f(x - \theta), \quad h_\sigma(x) = f\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \psi_{\theta,\sigma}(x) = f\left(\frac{x - \theta}{\sigma}\right)$$

Exprimer les transformées de Fourier de g_θ , h_σ et $\psi_{\theta,\sigma}$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$.

2.2. Déterminer la transformée de Fourier de $h_a(x) = e^{-|x-a|}$ ($a \in \mathbb{R}$).

2.3. Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, d'après le cours (page 103), la transformée de Fourier de f est définie par : $\mathcal{F}(f)(\nu) = \pi e^{-2\pi|\nu|}$. On considère la fonction $g_{a,b}(x) = \frac{1}{b^2 + (x-a)^2}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Déterminer la transformée de Fourier de $g_{a,b}$.

Exercice 3 Dans cet exercice on admet que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

3.1. Déterminer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$.

3.2. En déduire les transformées de Fourier de :

$$f_1(x) = x e^{-x^2}$$

$$f_2(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f_3(x) = (1+x)^2 e^{-x^2}$$

Exercice 4

1. Déterminer la transformée de Fourier de $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. En déduire la transformée de Fourier de $\frac{\sin x}{x}$ et calculer les intégrales suivantes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

2. Déterminer la transformée de Fourier de $g(x) = (1 - |x|) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. En déduire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 dx$$

Exercice 5

1. Déterminer la transformée de Fourier de $f(x) = (4\pi^2 x^2 - 1) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x)$.

2. En déduire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right)^2 dx$$

3. En utilisant la formule d'inversion (à justifier) calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \cos x dx$$

Exercice 6 Soit $g(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$. En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la fonction f sommable vérifiant l'équation : $f * g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

Exercice 7

- Fonction d'autocorrélation. Pour tout signal $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on définit la fonction d'autocorrélation de f par :

$$K_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau + u) f(u) du$$

- Densité spectrale d'énergie. $|\mathcal{F}(f)(\nu)|^2$ s'appelle la densité spectrale d'énergie de f . On a : $\mathcal{F}(K_f)(\nu) = |\mathcal{F}(f)(\nu)|^2$.
- Étalement. Pour tout signal f tel que : $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$ soit finie et non nulle, on définit l'étalement de f par :

$$\langle f \rangle^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx}$$

Pour les signaux suivants, déterminer :

la fonction d'autocorrélation k_f , la densité spectrale d'énergie et l'étalement $\langle f \rangle^2$.

$$1) f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \quad 2) f(x) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(x)$$

$$3) f(x) = \sin x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x) \quad 4) f(x) = \cos x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$5) f(x) = x e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \quad 6) f(x) = e^{-x^2}$$

★ On admet que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Exercice 8

• **Fonction d'intercorrélation.** Pour les signaux f et g vérifiant : $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on définit la fonction d'intercorrélation de f et g par :

$$K_{f,g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau + u) g(u) du$$

Pour les signaux suivants, déterminer la fonction d'intercorrélation $k_{f,g}$:

$$1) f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x) \quad g(x) = e^x \mathbb{1}_{]-\infty, 0]}(x)$$

$$2) f(x) = \sin x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x) \quad g(x) = \cos x \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$$

$$3) f(x) = \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x) \quad g(x) = \mathbb{1}_{[0, 2]}(x)$$

Exercice 9 Pour $\theta > 1$, soit $\psi_\theta(x) = \theta^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty[}(x)$.

1. Exprimer $\int_0^\infty \psi_\theta(x) dx$ en fonction de θ .
2. Déterminer $\mathcal{F}(\psi_\theta)$ la transformée de Fourier de ψ_θ .
3. Pour $a > 1$ et $b > 1$, déterminer $\psi_a * \psi_b$.
4. Déterminer K_{ψ_θ} la fonction d'autocorrélation ψ_θ .
4. Pour $a > 1$ et $b > 1$, déterminer K_{ψ_a, ψ_b} la fonction d'intercorrélation de ψ_a et ψ_b .



Transformée de Laplace

Exercice 1

Calculer si elles existent la transformée de Laplace des fonctions suivantes et donner l'abscisse de sommabilité :

- 1) $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
- 2) $f(x) = \sinh ax \mathbb{1}_{0,\infty[}(x)$
- 3) $f(x) = \cosh ax \mathbb{1}_{0,\infty[}(x)$
- 4) $f(x) = \cos \omega x e^{-ax} \mathbb{1}_{0,\infty[}(x)$
- 5) $f(x) = \sin \omega x e^{-ax} \mathbb{1}_{0,\infty[}(x)$
- 6) $f(x) = x e^{-ax} \mathbb{1}_{0,\infty[}(x)$

Exercice 2

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \mathbb{1}_{0,\infty[}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
- 2) $f(x) = \cos x \mathbb{1}_{0,\infty[}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
- 3) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \mathbb{1}_{0,\infty[}(x)$

Exercice 3

Déterminer la transformée de Laplace de la fonction périodique, de période T , égale à f_0 définie par :

$$f_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Exercice 4

Trouver les originaux de :

$$1) \quad \frac{1}{p^2 - 9} \quad 2) \quad \frac{p}{(p+2)(p-1)}$$

$$3) \quad \frac{1}{(1+p)^2} \quad 4) \quad \frac{p}{(1+p)^2}$$

$$5) \quad \frac{2p-1}{p^2+p+1} \quad 6) \quad \frac{1}{p^2(1+p^2)}$$

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) \quad y'(t) + 2y(t) = 0 \quad (y(0) = 1)$$

$$2) \quad 2y'(t) - y(t) = 1 \quad (y(0) = 2)$$

$$3) \quad 5y'(t) - 5y(t) = t \quad (y(0) = 0)$$

$$4) \quad y'(t) + 2y(t) = \cos t \quad (y(0) = 7/5)$$

$$5) \quad y''(t) + 5y'(t) - 6y(t) = 1 \quad (y(0) = 2, y'(0) = 1)$$

$$6) \quad y''(t) + y'(t) - 6y(t) = e^{-t} \quad (y(0) = 1, y'(0) = -1)$$

$$7) \quad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t} \quad (y(0) = -1, y'(0) = 3)$$

$$8) \quad y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \cos t e^{-2t} \quad (y(0) = 2, y'(0) = 1)$$

$$9) \quad y''(t) + y(t) = 2e^{-t} \quad (y(0) = 0, y'(0) = 3)$$

$$10) \quad y''(t) + y'(t) = 4 \cos t \quad (y(0) = 1, y'(0) = 1)$$



• *fonction test*. Une fonction test est une fonction indéfiniment dérivable et nulle hors d'un intervalle. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions tests.

• *distribution*. Une distribution est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}$. L'application T de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ est une distribution si :

$$1) \quad T(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n) = T(\varphi) \quad \text{si} \quad \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \varphi$$

• *distribution régulière*. Une distribution T est dite régulière s'il existe une fonction f sommable sur tout segment telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

T s'appelle la distribution régulière associée à f .

Notation. La distribution régulière associée à f est notée : T_f ou $[f]$ et pour $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

- *distribution singulière*. Une distribution qui n'est associée à aucune fonction s'appelle une distribution singulière.
- *masse de Dirac*. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la distribution définie par : $T(\varphi) = \varphi(\theta)$ s'appelle la masse de Dirac en θ . On la note δ_θ et pour $\theta = 0$ on écrit δ au lieu de δ_0 .
- La masse de Dirac en θ est une distribution singulière.

Exercice 1

Les applications suivantes de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ sont-elles des distributions ?

$$1) \quad T(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx$$

$$2) \quad T(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2(x) dx$$

$$3) \quad T(\varphi) = \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) dx$$

$$4) \quad T(\varphi) = \int_0^\infty x \varphi(x) dx$$

$$5) \quad T(\varphi) = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$6) \quad T(\varphi) = \varphi(a) - \varphi(b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$7) \quad T(\varphi) = \varphi'(a) - \varphi'(b) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad 8) \quad T(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k)$$

$$9) \quad T(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi'(k)$$

$$10) \quad T(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi^k(\theta) \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$11) \quad T(\varphi) = \sup\{\varphi(\theta), 0\} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad 12) \quad T(\varphi) = \inf\{\varphi(\theta), 0\} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Les distributions suivantes sont-elles régulières ou singulières ?

$$1) \quad T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \varphi(x) dx$$

$$2) \quad T(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2} dx$$

$$3) \quad T(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx + \int_1^{\infty} e^{-(x-1)} \varphi(x) dx$$

$$4) \quad T(\varphi) = \varphi(2) - \varphi(1)$$

$$5) \quad T(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \varphi(x) dx$$

$$6) \quad T(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \varphi(x) dx$$

$$7) \quad T(\varphi) = \varphi(\theta) + \int_{\theta}^{\infty} e^{-(x-\theta)} \varphi(x) dx \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$8) \quad T(\varphi) = \int_0^{\infty} e^{-x} \varphi'(x) dx$$

$$9) \quad T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi''(x) dx$$

$$10) \quad T(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k\theta) \quad \theta > 0$$

$$11) \quad T(\varphi) = \int_{-1}^1 \varphi(x+\theta) dx \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- *dérivation*. La dérivée de la distribution T est définie par :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$$

Toute distribution est indéfiniment dérivable et on a :

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

Exercice 3

Calculer les dérivées des distributions suivantes :

$$1) \quad T(\varphi) = \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) dx$$

$$2) \quad T(\varphi) = \int_{-1}^1 x^2 \varphi(x) dx$$

$$3) \quad T(\varphi) = \int_{-\pi}^\pi |\cos x| \varphi(x) dx$$

$$4) \quad T(\varphi) = \int_0^\infty e^{-x^2} \varphi(x) dx$$

$$5) \quad T(\varphi) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{1+x^2} dx$$

$$6) \quad T(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx + \int_1^\pi \sin x \varphi(x) dx$$

$$7) \quad T(\varphi) = \int_{-2}^2 |x+1| \varphi(x) dx$$

$$8) \quad T(\varphi) = \int_0^\infty |x-1| e^{-x} \varphi(x) dx$$

$$9) \quad T(\varphi) = \int_0^\infty x e^{-x^2} \varphi(x) dx$$

- pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sauf aux points $\theta_1, \dots, \theta_k$, on a :

$$[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^k \Delta f(\theta_i) \delta_{\theta_i}$$

où $\Delta f(\theta_i) = f(\theta_i^+) - f(\theta_i^-)$ désigne l'amplitude du saut de f au point θ_i .

- pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sauf aux points $\theta_1, \dots, \theta_k$, on a :

$$[f]'' = [f''] + \sum_{i=1}^k \Delta f(\theta_i) \delta'_{\theta_i} + \sum_{i=1}^k \Delta f'(\theta_i) \delta_{\theta_i}$$

où $\Delta f(\theta_i) = f(\theta_i^+) - f(\theta_i^-)$ désigne l'amplitude du saut de f au point θ_i et $\Delta f'(\theta_i) = f'(\theta_i^+) - f'(\theta_i^-)$ désigne l'amplitude du saut de f' au point θ_i .

- pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^m$ sauf aux points $\theta_1, \dots, \theta_k$, on a :

$$[f]^{(m)} = [f^{(m)}] + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^k \Delta f^{(j)}(\theta_i) \delta_{\theta_i}^{(m-1-j)}$$

où pour $j = 0, 1, \dots, m-1$, $\Delta f^{(j)}(\theta_i) = f^{(j)}(\theta_i^+) - f^{(j)}(\theta_i^-)$ désigne l'amplitude du saut de $f^{(j)}$ au point θ_i (avec $f^{(0)} = f$).

- ★ pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^m$, on a: $[f]^{(m)} = [f^{(m)}]$.

- *dérivée de masse de Dirac*. Pour toute fonction test φ , on a :

$$\langle \delta_{\theta}^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(\theta)$$

Exercice 4

Pour des fonctions f suivantes, déterminer $[f]'$, $[f]''$ et $[f]^{(3)}$:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3 - x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 < x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} 2 + |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 < x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} 4 - |2 + x| & \text{si } -4 < x < -1 \\ 1 + x^2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} 4 + x^2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• *formule de Poisson.* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\theta} \delta_{\frac{k}{\theta}}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi k \theta t}$

• *produit de covolution.* Pour toute distribution T , on a :

$$\delta * T = T, \quad \delta_{\theta} * T(x) = T(x - \theta), \quad \delta^{(p)} * T = T^{(p)}$$

• *fonctions périodiques.* Pour toute fonction f de période T , égale à f_0 sur $[0, T]$, on a :

$$f = f_0 * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$$

• *Transformée de Fourier.*

$$\mathcal{F}(\delta) = 1, \quad \mathcal{F}(\delta_{\theta})(\nu) = e^{-2i\pi\theta\nu}, \quad \mathcal{F}(\delta^{(p)})(\nu) = (2i\pi\nu)^p$$

$$\mathcal{F}\left(\sum_k \delta_{k\theta}\right)(\nu) = \frac{1}{\theta} \sum_k \delta_{\frac{k}{\theta}}(\nu)$$

• *dérivée-translation.* Pour toute distribution T , on a :

$$(\mathcal{F}(T))^{(p)} = (-1)^p \mathcal{F}((2i\pi t)^p T), \quad \mathcal{F}(T^{(p)})(\nu) = (2i\pi\nu)^p \mathcal{F}(T)(\nu)$$

$$\mathcal{F}(T(x - \theta))(\nu) = e^{-2i\pi\theta\nu} \mathcal{F}(T)(\nu), \quad \mathcal{F}(T)(\nu - \theta) = \mathcal{F}(e^{2i\pi\theta t} T)(\nu)$$

• *formule de Poisson.* Pour toute fonction test φ , on a :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\varphi)(k\theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{\theta}\right)$$

• *coefficients complexes de Fourier.* Si f est une fonction périodique de période T , égale à f_0 sur $[0, T]$, on a :

$$[f] = [f_0] * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}([f]) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{\frac{k}{T}}$$

avec $c_k = \frac{1}{T} \mathcal{F}([f_0])\left(\frac{k}{T}\right)$, où $\mathcal{F}([f_0])$ désigne la transformée de Fourier de $[f_0]$ et c_k sont les coefficients complexes de Fourier.

Exercice 5

Pour les distributions régulières $[f]$ suivantes:

- a) déterminer $[f]'$, $[f]''$ et $[f]'''$
 b) en déduire la transformée de Fourier $\mathcal{F}([f])$.

1) $f(x) = \cos x$

2) $f(x) = \sin x$

3) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ 1 + x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si } -2 < x < 1 \\ x & \text{si } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 6

On considère la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} |2+x| & \text{si } -3 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. Déterminer $[f_0]'$ et $[f_0]''$.

2.2. Déterminer la transformée de Fourier de f_0 .

2.3. Soit f une fonction périodique de période $T = 6$, égale à f_0 sur $[-3, 3]$. Déterminer le développement en série de Fourier de f .

Exercice 7

On considère la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1. Déterminer $[f_0]'$, $[f_0]''$ et $[f_0]'''$.

2.2. Déterminer la transformée de Fourier de f_0 .

2.3. Soit f une fonction périodique de période $T = 4$, égale à f_0 sur $[-2, 2]$. Déterminer le développement en série de Fourier de f .

Exercice 8

On considère la fonction f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer $[f_0]'$, $[f_0]''$ et $[f_0]'''$.

2. Déterminer la transformée de Fourier de f_0 .

3. Soit f une fonction périodique de période $T = 8$, égale à f_0 sur $[-4, 4]$. Déterminer le développement en série de Fourier de f .