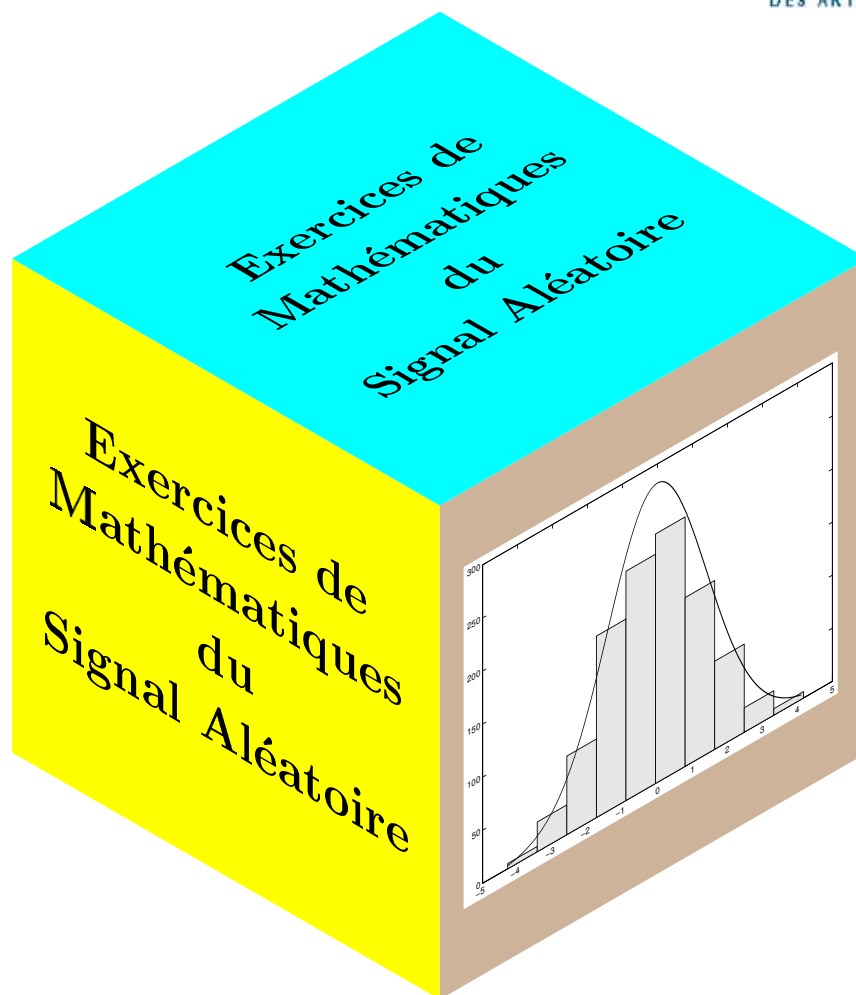
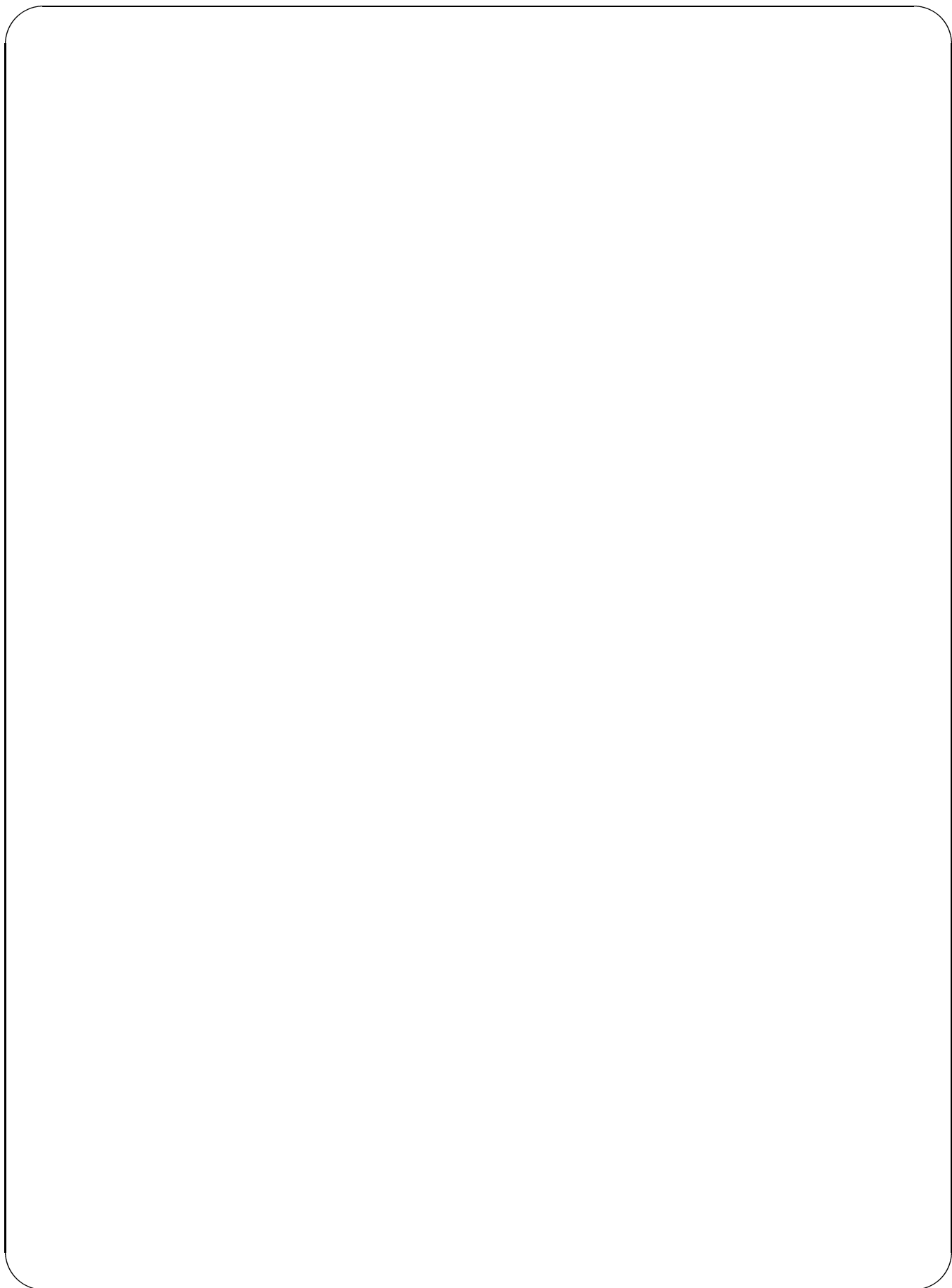




D.GHORBANZADEH



Exercice 1 (*formule de Binôme*)

En utilisant la formule de Binôme $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n C_n^k \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k C_n^k$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^n k(k-1) C_n^k \quad S_4 = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$$

Exercice 2 (*suites réelles*)

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation de récurrence : $3U_{n+1} - U_n = 1$ et la donnée de son premier terme $U_1 = 6$. Exprimer U_n en fonction de n .

Exercice 3 (*suites réelles*)

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par la relation de récurrence :

$$12U_{n+2} - 7U_{n+1} + U_n = 0$$

et la donnée de ses deux premiers termes $U_1 = \frac{1}{12}$, $U_2 = \frac{1}{144}$.

1. Exprimer U_n en fonction de n .
2. Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$.

Exercice 4 (*fonction Gamma*)

Pour $\alpha > 0$, l'on définit la fonction $\Gamma(\alpha)$ par : $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Montrer que

1. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$. En déduire la valeur de $\Gamma(\alpha)$ lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
2. $\Gamma(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} u^{2\alpha-1} e^{-u^2} du$.
3. $\Gamma(\alpha) = \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du \quad \lambda > 0$.
4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5 (*calculs de probabilités*)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$

1. Montrer que si $A \subset B$, alors, $P(B - A) = P(B) - P(A)$ et $P(A) \leq P(B)$.
2. Montrer que l'on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{et} \quad P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Exercice 6 (*calculs de probabilités*)

Un étudiant, soucieux de ses résultats, estime à 60% ses chances de réussir son cours de Mathématiques, à 85% ses chances de réussir son cours d'Informatique et à 50% ses chances de réussir les deux matières. Calculer la probabilité :

1. qu'il réussisse en Mathématiques, mais pas en Informatique
2. qu'il réussisse en Informatique, mais pas en Mathématiques
3. qu'il réussisse dans au moins une de ces deux matières.

Exercice 7 (*calculs de probabilités*)

On considère le système d'équations d'inconnus (x, y) , dans lequel a, b, c

désignent trois paramètres réels :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients a, b, c l'on lance, trois fois, un dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 : le premier numéro sorti donne a , le second b et le troisième c .

1. Calculer les probabilités p_1, p_2, p_3 , pour que le système ainsi obtenu ait respectivement : une infinité de solutions; aucune solution; une solution unique.
2. Quelle est la probabilité pour que le système admette la solution unique $(3, 0)$.

Exercice 8 (*combinatoire*)

Un joueur de bridge possède dans sa main 13 cartes d'un jeu de 52 cartes distribuées au hasard. Calculer la probabilité qu'il ait :

1. un as exactement.
2. au moins un as.
3. un as et un roi.
4. au moins un as et au moins un roi.
5. une carte de chaque valeur.

Exercice 9 (*combinatoire*)

Une urne contient n boules dont n_1 rouges, n_2 blanche et n_3 bleues. On en tire 3 boules (sans les remplacer), calculer la probabilité pour que

1. toutes les trois soient rouges;
2. deux soient rouges et une blanche;
3. au moins une soit blanche;
4. il y ait une de chaque couleur;
5. les boules soient tirées dans l'ordre bleue, blanche et rouge.

Exercice 10 (*probabilité conditionnelle*)

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non-vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné? Le vaccin est-il efficace?

Exercice 11 (*probabilité conditionnelle*)

1. Une famille a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon?
2. Une autre famille a deux enfants, le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'aîné soit un garçon?

Exercice 12 (*probabilité conditionnelle*)

Des pièces mécaniques sont fabriquées à la chaîne. Sur chacune d'elles on effectue un test pour en contrôler la qualité. On désigne par B l'événement : "une pièce choisie par hasard est bonne" et par T l'événement : "le test indique que la pièce est bonne". On désigne par p la probabilité pour qu'une pièce choisie par hasard soit bonne, par p_1 la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui est effectivement bonne et par p_2 la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui en réalité mauvaise. On suppose $p \notin \{0,1\}$.

1. Calculer en fonction de p , p_1 et p_2 la probabilité pour qu'une pièce, indiquée comme bonne par le test, soit effectivement bonne.
2. A quelle condition, portant sur p_1 et p_2 , le test est-il utile?
3. *Application numérique* . $p = 0,8$, $p_1 = 0,9$ et $p_2 = 0,1$.

Exercice 13 (*loi de probabilité discrète*)

Pour $\theta \in]0,1[$, on définit la suite p_k par :

$$p_k = \begin{cases} C(1-\theta)^{\min\{k,6-k\}} & \text{si } k = 1, \dots, 5 \\ \theta & \text{si } k = 6 \end{cases}$$

où C est une constante positive. Déterminer C de sorte que p_k soit une loi de probabilités sur $\{1, \dots, 6\}$.

Exercice 14 (*loi de probabilité discrète*)

Pour $\theta \in]0,1[$, on définit la suite p_k par :

$$p_k = \begin{cases} C\theta^{\max\{k,7-k\}} & \text{si } k = 1, \dots, 6 \\ 1-\theta & \text{si } k = 7 \end{cases}$$

où C est une constante positive. Déterminer C de sorte que p_k soit une loi de probabilités sur $\{1, \dots, 7\}$.

Exercice 15 (*variable aléatoire discrète*)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$ de loi :

$$P(X = i) = K i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

où K est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante K .
2. Déterminer la fonction de répartition de la loi de X .
3. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Exercice 16 (*variable aléatoire discrète*)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 5\}$ de loi :

$$P(X = i) = K(6 - i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 5\}$$

où K est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante K .
2. Déterminer la loi de $U = \max\{X, 5 - X\}$.
3. Déterminer la loi de $V = \min\{X, 5 - X\}$.

Exercice 17 (*calculs de lois*)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$ de lois respectives:

$$P(X=1)=p_1, P(X=0)=1-p_1, P(Y=1)=p_2, P(Y=0)=1-p_2$$

On pose $U_1 = X + Y$ et $U_2 = XY$.

1. Déterminer les lois de U_1 et de U_2 .
2. Calculer $E[U_1]$, $Var[U_1]$, $E[U_2]$ et $Var[U_2]$.

Exercice 18 (*calculs de lois*)

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes à de lois respectives:

$$P(X=-1)=p_1, P(X=0)=p_2, P(X=1)=p_3 \text{ avec } p_1+p_2+p_3=1$$

$$P(Y=k) = \frac{6}{\pi^2 k^2} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 19 (*densité de probabilités*)

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{B}{(\theta+x)^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

1. Exprimer A et B en fonction de θ de sorte que f soit continue en 1 et la densité de la loi d'une variable aléatoire X .
2. Peut-on trouver θ_0 tel que $E[X] = \theta_0$?

Exercice 20 (*fonction indicatrice*)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[-2,2]$, de densité: $f_X(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x)$. On définit les variables aléatoires U et V par: $U = \mathbb{1}_{[-1,2]}(X)$ et $V = X \mathbb{1}_{[-2,0]}(X)$.

Calculer $E[U]$, $Var[U]$ et $E[V]$, $Var[V]$.

► On utilisera: $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$

Exercice 21 (*calculs des moments*)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x) \quad \lambda > 0 .$$

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilités.
2. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $E[X^k]$. En déduire $Var[X]$.
4. Soit Y une autre variable aléatoire dont la loi admet la densité :

$$f_Y(y) = C(x_0) f_X(y) \mathbb{1}_{[x_0, \infty[}(y) \quad x_0 \in \mathbb{R} .$$

- 4.1. Déterminer la valeur de $C(x_0)$.
- 4.2. Calculer $E[Y]$ et $Var[Y]$.

Exercice 22 (*densité de probabilités*)

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ 10 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 8 + x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

1. Calculer $K = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$
2. Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :
 $f_X(x) = \frac{g(x)}{K}$.
- 2.1. Calculer $E[X]$ et $Var[X]$.
- 2.2. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
- 2.3. Calculer $P(0 \leq X \leq 2 \mid X \geq -2)$.
- 2.4. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
- 2.5. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 \leq Y \leq 4 \\ Y & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un réel.

Déterminer $\mu(\theta) = E[Z]$ et $V(\theta) = Var[Z]$. Pour quelle valeur de θ , $V(\theta)$ est-elle minimum? (on notera cette valeur $\hat{\theta}$). Que peut-on dire de $\mu(\hat{\theta})$?

Exercice 23 (*médiane*)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \mathbb{1}_{[0,a]}(x) \quad a > 0$$

1. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
2. Calculer $P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq a\right)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $E[X^k]$. En déduire $Var[X]$.
4. Trouver θ tel que $F_X(\theta) = \frac{1}{2}$. (θ s'appelle la *médiane* de la loi de X).

Exercice 24 (*calculs des moments*)

Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet la densité :

$$f_X(x) = K e^{-\lambda|x|} \quad \lambda > 0$$

où K est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante K .
2. Déterminer F_X la fonction de répartition de la loi de X .
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $E[X^k]$. En déduire $Var[X]$.
4. Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $P(X > a)$.

Exercice 25 (*calculs de lois*)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer la loi de $U = \sup\{X, 1 - X\}$.
2. Déterminer la loi de $V = \inf\{X, 1 - X\}$.

Exercice 26 (*calculs de lois*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

Déterminer la loi de la somme $S = X + Y$ si

1. X et Y suivent la même loi uniforme sur $[-1,1]$.
2. X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et Y suit la loi uniforme sur $[-1,2]$.

Exercice 27 (*polynôme de second degré*)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,a]$.

1. Déterminer la loi $U = X^2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$.
 - 2.1. Déterminer la loi de $Z = X^2 - Y$.
 - 2.2. On considère le polynôme $Q(t) = t^2 - 2Xt + Y$. Calculer la probabilité que les racines de Q soient complexes.

Exercice 28 (*loi de Poisson*)

On dit qu'une variable aléatoire discrète Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si la loi de Z est donnée par :

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer $E[Z]$ et $Var[Z]$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la loi de $U = X + Y$.

Exercice 29 (*loi géométrique*)

On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit une loi géométrique de paramètre θ , ($0 < \theta < 1$), si la loi de X est donnée par :

$$P(X = k) = \theta (1 - \theta)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On définit la variable aléatoire Y par : $Y = \text{Max}\{X, 3\}$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Déterminer $E[Y]$ et $Var[Y]$.

Exercice 30 (*calculs de lois*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Déterminer la loi de $U = \frac{X}{X + Y}$.
2. Calculer $E[U]$ et $Var[U]$.

► On utilisera : $E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X, Y}(x, y) dx dy$

Exercice 31 (*calculs de lois*)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose $Y = X(1 - X)$.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Calculer $E[Y]$ et $Var[Y]$.

► On utilisera : $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$

Exercice 32 (*calculs de lois*)

Soit X une variable aléatoire réelle de densité: $f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x)$.

- 1) Déterminer la densité de la loi de $U = \sqrt{X}$.
- 2) Pour $\eta > 0$, déterminer $P(U > \eta)$.

Exercice 33 (*calculs de lois*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives:

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x), \quad f_Y(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(y)$$

On pose: $S = X + Y$ et $U = \frac{X}{Y}$.

1. Déterminer la loi du couple (S, U) .
2. Déterminer la loi marginale de U .
3. S et U sont-elles indépendantes?

► On utilisera: $E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$

Exercice 34 (*indépendance*)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de lois respectives:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \quad (\lambda > 0) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y).$$

On pose $U = \sqrt{X} \cos Y$ et $V = \sqrt{X} \sin Y$.

Montrer que U et V sont indépendantes et suivent la même loi.

► On utilisera: $E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$

Exercice 35 (*coefficient de corrélation*)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité:

$$f_{X,Y}(x, y) = (y - x) \mathbb{1}_{]0,1[}(x) \mathbb{1}_{]1,2[}(y).$$

Calculer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .

Exercice 36 (*lois conditionnelles*)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que

- la loi de X admet le densité $f_X(x) = \frac{x+1}{2} e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$.
- Conditionnellement à $\{X = x\}$, la loi de Y a pour densité

$$f_Y(y | x) = \frac{x+y}{1+x} e^{-y} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(y) .$$

1. Déterminer la loi de X , sachant $\{Y = y\}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $E[X^k | Y = y]$. En déduire $Var[X | Y = y]$.
3. Calculer ρ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

Exercice 37 (*coefficient de corrélation*)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité

$$f_{X,Y}(x,y) = K (x^2 + y^2) \exp\{-(x^2 + y^2)\} \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(y) .$$

1. En effectuant le changement de variables : $x = \sqrt{r} \cos \theta$, $y = \sqrt{r} \sin \theta$, déterminer la valeur de la constante K .
2. Calculer ρ le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

Exercice 38 (*lois conditionnelles*)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité

$$f_{X,Y}(x,y) = K xy \mathbb{1}_{\{0 < x < y < 1\}} .$$

1. Déterminer la valeur de la constante K .
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y .
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$, calculer $E[X^k Y^s]$. En déduire $Cov(X, Y)$.
4. Déterminer la loi de X sachant $\{Y = y\}$.
5. Calculer $E[X | Y = y]$ et $Var[X | Y = y]$.
6. Déterminer la loi de Y , sachant $\{X = x\}$.
7. Calculer $E[Y | X = x]$ et $Var[Y | X = x]$.

Exercice 39 (*lois conditionnelles*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi *géométrique* de paramètre θ , i.e. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = m\}$.
2. Déterminer $E[X \mid X + Y = m]$ et $Var[X \mid X + Y = m]$.

Exercice 40 (*lois conditionnelles*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = s\}$.
2. Déterminer $E[X \mid X + Y = s]$ et $Var[X \mid X + Y = s]$.

Exercice 41 (*lois conditionnelles*)

On suppose que le nombre de passages de véhicules en un point de l'autoroute **A6** pendant un intervalle de temps I suit une loi de *Poisson* de paramètre λ_1 dans le sens Paris-Provence et une loi de *Poisson* de paramètre λ_2 dans le sens Province-Paris.

1. Déterminer la loi du nombre total de passages (quelle que soit la direction prise par les véhicules) en ce point de l'autoroute **A6** pendant un intervalle de temps I .
2. Déterminer la probabilité p que, sur un nombre total égal à N , il y ait M dans le sens Province-Paris.

Exercice 42 (*statistiques d'ordre*)

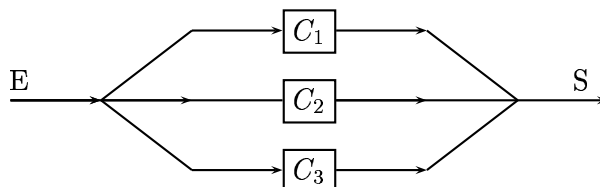
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x,y) = \theta^2 e^{-\theta y} \mathbb{1}_{\{0 < x < y\}} \quad (\theta > 0) .$$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$, calculer $E[X^k Y^s]$.
2. Calculer ρ le coefficient de corrélation entre X et Y .
3. On pose : $U = X + Y$ et $V = Y - X$.
 - 3.1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
 - 3.2. U et V sont-elles indépendantes ?
 - 3.3. Déterminer F_V la fonction de répartition de la loi de V .
4. Soit $V_1, \dots, V_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que V . On pose : $Z_n = \inf\{V_1, \dots, V_n\}$ et $T_n = \sup\{V_1, \dots, V_n\}$.
 - 4.1. Déterminer les lois marginales de Z_n et de T_n .
 - 4.2. Calculer $E[Z_n]$ et $Var[Z_n]$.

Exercice 43 (*durée de vie*)

Un système électronique, ayant une entrée E et une sortie S est constitué de trois composantes C_1 , C_2 et C_3 montés en parallèle selon le schéma suivant :



Le système cesse de fonctionner quand il n'y a plus de chemin entre E et S . Soit T_1 , T_2 et T_3 les durées de vie respectives des composants C_1 , C_2 et C_3 . On suppose que ce sont des variables aléatoires réelles indépendantes de lois :

$$f_j(x_j) = \lambda_j e^{-\lambda_j x_j} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x_j) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\lambda_j > 0)$$

Déterminer la loi de la durée de vie du système.

Exercice 44 (*fonction caractéristique*)

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de fonction de répartition F .

Pour $k = 1, \dots, n$ l'on pose $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_k > \theta\}}$ et $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

1. Déterminer φ_{Y_k} la fonction caractéristique de la loi de Y_k .
2. Déterminer φ_{S_n} la fonction caractéristique de la loi de S_n .

Exercice 45 (*variables gaussiennes*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose : $U = X^2 + Y^2$ et $V = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 46 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$ où $\mathbf{I}_2$ désigne la matrice identité de dimension 2.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'on définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2 \\ Y_2 = -\sin\theta X_1 + \cos\theta X_2 \end{cases}$$

Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$. Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 47 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \mathbf{I}_3)$ où $\mathbf{I}_3$ désigne la matrice identité de dimension 3. On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$

$$\text{par : } \begin{cases} Y_1 = X_1 \\ Y_2 = X_2 - X_1 \\ Y_3 = X_3 - X_2 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$. Y_1 , Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes?
2. Déterminer la loi de Y_3 , sachant $\{(Y_1, Y_2) = (y_1, y_2)\}$.

Exercice 48 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_4(\mathbf{M}_X, \mathbf{V}_X)$ où $\mathbf{M}_X = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_X = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \theta & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \theta & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \theta \end{pmatrix} \quad (\theta > 3)$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2)$ par :
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 + 2X_4 \\ Y_2 = 3X_1 - 2X_2 - \theta X_3 + X_4 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$.
2. Déterminer θ_0 de sorte que Y_1 et Y_2 soient indépendantes.
3. On suppose $\theta = 5$. Déterminer la loi conditionnelle de Y_1 sachant $\{Y_2 = y_2\}$ et puis calculer $E[Y_1 | Y_2]$ et $\text{Var}[Y_1 | Y_2]$.

Exercice 49 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{M}_X, \mathbf{V}_X)$ où $\mathbf{M}_X = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :
$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_3 \\ Y_2 = \alpha X_1 + 2X_2 + \beta X_3 \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$.
2. Pour quelles valeurs de α et β , $(Y_1 \text{ et } Y_2)$ et $(Y_2 \text{ et } Y_3)$ sont-elles indépendantes?
3. Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_3) .
En déduire la loi conditionnelle de Y_1 sachant $\{Y_3 = y_3\}$ et puis calculer $E[Y_1 | Y_3]$ et $\text{Var}[Y_1 | Y_3]$.

Exercice 50 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ avec $\mathbf{M}_\mathbf{X} = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 2 \\ -2 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -2\alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.

1. Montrer que Y_1 , Y_2 et Y_3 sont indépendantes.

2. Dans la suite on pose : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.1. Calculer le produit $\mathbf{A} {}^t\mathbf{A}$. (${}^t\mathbf{A}$ désigne la transposée de $\mathbf{A}$).

2.1. On pose : $Q(\mathbf{X}) = {}^t\mathbf{X} \mathbf{V}_\mathbf{X} \mathbf{X}$. Calculer $E[Q(\mathbf{X})]$ et $Var[Q(\mathbf{X})]$.

On rappelle que si U suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad E[U^{2k}] = \frac{(2\sigma^2)^k}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k + \frac{1}{2})$$

avec $\forall a > 0 \quad \Gamma(1 + a) = a \Gamma(a)$.

Exercice 51 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_3(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ où $\mathbf{M}_\mathbf{X} = {}^t(1, -3, 1)$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 - X_2 - 4X_3 \\ Y_2 = 3X_1 - X_2 + 5X_3 \\ Y_3 = 2X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$.

2. Y_1 , Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $E[X_1 X_2]$, $E[X_1 X_3]$ et $E[X_2 X_3]$.

Exercice 52 (*vecteurs gaussiens*)

Soit $\mathbf{X} = {}^t(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur Gaussien $\mathcal{N}_4(\mathbf{M}_\mathbf{X}, \mathbf{V}_\mathbf{X})$ où $\mathbf{M}_\mathbf{X} = 0$ et

$$\mathbf{V}_\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $\mathbf{Y} = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par :

$$\begin{cases} Y_1 = 5X_1 + X_2 + \beta X_3 + \alpha X_4 \\ Y_2 = X_1 - X_2 + X_4 \\ Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3 \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de $\mathbf{Y}$.
 2. Pour quelles valeurs de α et β , Y_1, Y_2, Y_3 sont-elles indépendantes ?
- Sous cette condition, calculer $E[Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2]$.

Exercice 53 (*erreur de l'approximation*)

Soit U une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$ de densité $f_U(u) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(u)$. On définit les variables aléatoires X, Y, Z par : $X = \cos^3(\pi U)$, $Y = \cos^2(\pi U)$ et $Z = \cos(\pi U)$.

1. Déterminer $K_{X,Y,Z}$ la matrice variance-covariance du vecteur (X, Y, Z) .
2. En utilisant le **théorème 13.15** déterminer :
 - 2.1. $\hat{X}$ la meilleure approximation de X par une variable aléatoire de la forme $\beta + \alpha_1 Y + \alpha_2 Z$.
 - 2.2. $\|\hat{X} - X\|^2$ l'erreur de l'approximation.

► On admet que :
$$\int_{-1}^1 \cos^n(\pi\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m + 1 \\ \frac{C_{2m}^m}{4^m} & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

Exercice 54 (*Théorème Limite Centrale*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$\forall x = -1, 0, 1, \dots \quad P(X_i = x) = \frac{e^{-1}}{(x+1)!}.$$

On pose : $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Déterminer la loi de S_n .

2. En utilisant le *Théorème Limite Centrale* montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 55 (*convergence en probabilité*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi *Bernoulli* de paramètre p ($0 < p < 1$). On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_n . En déduire $E[Y_n]$ et $Var[Y_n]$.

2. Soit $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

2.1. Calculer $E[T_n]$ et $Var[T_n]$.

2.2. Montrer que T_n converge en probabilité vers la variable presque sûrement égale à $2p$.

Exercice 56 (*convergence*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes (pour tout i , X_i et Y_i indépendantes entre elles) de lois respectives :

$$\forall i, P(X_i = -1) = p, \quad P(X_i = 1) = 1 - p \quad (0 < p < 1)$$

$$\forall i, \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_i = 1) = (1 - \theta) \theta^k \quad (0 < \theta < 1).$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$.

1. Calculer $E[S_n]$ et $Var[S_n]$.

2. On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrer que pour tout réel $\eta > 0$, les limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| < n\eta) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| < \eta\sqrt{n})$$

existent et trouver leurs valeurs.

Exercice 57 (*convergence en loi*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même

loi: $P(X_n = \pm \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}$. On pose: $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Déterminer φ_{X_k} la fonction caractéristique de X_k .
2. Montrer que S_n converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.

Exercice 58 (*Théorème Limite Centrale*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de *Poisson* de paramètre 1. On pose: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer la loi de S_n .
2. En utilisant le *Théorème Limite Centrale* montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 59 (*convergence en loi*)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que:

- X est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ de loi:

$$P(X = 0) = 1 - \theta, P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{\theta}{2} \quad (0 < \theta < 1)$$

- la loi de Y est uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$, i.e.:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(y).$$

1. On pose: $U = XY$.
 - 1.1. Déterminer φ_U la fonction caractéristique de U .
 - 1.2. Déterminer $E[U]$ et $Var[U]$.
2. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que U . On pose: $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$. Pour $\eta > 0$, calculer:
 - 2.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| < \eta n)$.
 - 2.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n| < \eta \sqrt{n})$.

Exercice 60 (*convergence*)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles dont la loi admet la densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} (x^2 + y^2) \exp \left(-\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right) \quad \forall x > 0, y > 0.$$

1. On pose : $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

1.1. X et Y sont-elles indépendantes ?

1.2. Déterminer la loi du couple (X, U) .

1.3. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de X sachant $\{U = u\}$.

On la notera $f_u(x) = f_X(x | u)$

1.4. Calculer $\mu_u = E[X | U = u]$ et $\sigma_u^2 = Var[X | U = u]$.

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de densité $f_u(x)$.

On pose : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$.

2.1. Étudier la convergence en *moyenne quadratique* de $\bar{X}_n$.

2.2. Montrer que $\sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{2u}{\pi} \right)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

On rappelle que :

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \text{Arcsin} \lambda + C^{te}$$

$$\int \sqrt{1-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \left(\text{Arcsin} \lambda + \lambda \sqrt{1-\lambda^2} \right) + C^{te}.$$

Exercice 61 (*convergence*)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.

1. On pose: $U = X - Y$.

1.1. Déterminer la loi du couple (X, U) .

1.2. Déterminer la densité de la loi conditionnelle de X sachant $\{U = u\}$.

On la notera $f_u(x) = f_X(x | u)$

1.3. Calculer $\mu_u = E[X | U = u]$ et $\sigma_u^2 = Var[X | U = u]$.

2. Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi de densité $f_0(x)$.

On pose: $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$.

2.1. Étudier la convergence en *moyenne quadratique* de $\bar{X}_n$.

2.2. Montrer que $\sqrt{12n}(\bar{X}_n - \mu_0)$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

Exercice 62 (*convergence*)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoire de loi: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2} (y - x)^2 e^{-y} \mathbb{1}_{\{0 < x < y < \infty\}}$

1. On pose: $U = Y - X$.

1.1. Déterminer la loi du couple (Y, U) .

1.2. Y et U sont-elles indépendantes?

1.3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{U = u\}$.

On la notera $f_u(y) = f_Y(y | u)$

1.4. Calculer $\mu_u = E[Y | U = u]$ et $\sigma_u^2 = Var[Y | U = u]$.

2. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de densité $f_u(y)$. On pose: $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} (Y_1 + \dots + Y_n)$.

Montrer que $\sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mu_u)$ converge en loi vers la variable aléatoire V dont on précisera la loi.

Exercice 63 (*convergence*)

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de densité: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On pose: $M_n = \sup\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

1. Déterminer la loi de M_n .

2. Pour $\eta > 0$ donné, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n > n\eta)$.

On rappelle que, $\forall \theta > 0$, $\text{Arctg}\theta + \text{Arctg}\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 64 (*signal analogique*)

On considère le signal analogique X défini par : $X(t, \omega) = tU_1(\omega) + (1-t)U_2(\omega)$ où U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice 65 (*signal analogique*)

On considère le signal analogique X défini par : $X(t, \omega) = \sin(tU(\omega))$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$. Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice 66 (*signal numérique*)

On considère le signal numérique X défini par :

$$X(n, \omega) = V(\omega) \sin(na + U(\omega))$$

où a est une constante connue, U et V sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice 67 (*signal numérique*)

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = a \cos(bn + U(\omega))$, où a et b sont des constantes connues et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice 68 (*signal numérique*)

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = U(\omega) \sin(an + b)$, où a et b sont des constantes connues et U est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Calculer La moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice 69 (*signal numérique*)

On considère le signal numérique X défini par : $X(n, \omega) = a \cos(U(\omega)n + b)$, où a et b sont des constantes connues et U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\theta, \theta]$ ($\theta > 0$).

Calculer la moyenne, la fonction covariance, la variance et la fonction autocorrélation de X .

Exercice 70 (*signal stationnaire au second ordre*)

1. Soit Y et Z deux variables aléatoires vérifiant :

- la loi de Z admet la densité : $f_Z(z) = e^{-z} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(z)$
- la loi conditionnelle de Y sachant $\{Z = z\}$ a pour densité :

$$f_Y(y | Z = z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{|y|}{z}\right) \mathbb{1}_{]-z, z[}(y) .$$

Calculer $E[Y | Z]$ et $E[Y^2 | Z]$.

2. On considère le signal analogique X défini par :

$$X(t, \omega) = \sqrt{3} Y(\omega) \exp(-2i\pi t Z(\omega)) .$$

2.1. Montrer que X est stationnaire au second ordre.

2.2. Calculer P_X la puissance de X .

2.3. Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .

Exercice 71 (*signal stationnaire au second ordre*)

On considère X le processus à temps discret, défini par :

$$X(n, \omega) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^N Y(n-k, \omega) \sin(2\pi Z_k(\omega)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

où $N \geq 1$, $Z_1, \dots, Z_N$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$ et Y est un processus à temps discret, stationnaire au second ordre indépendant de $Z_1, \dots, Z_N$.

Dans la suite on notera : R_Y , P_Y et S_Y la fonction autocorrélation, la puissance et le spectre de puissance de Y .

1. Montrer que X est stationnaire au second ordre.
2. Calculer P_X la puissance de X .
3. Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

Exercice 72 (*signal stationnaire au second ordre*)

Soit Y un signal analogique centré et stationnaire au second ordre de fonction d'autocorrélation R_Y , de puissance P_Y et du spectre de puissance S_Y . On considère le signal analogique X définie par :

$$X(t, \omega) = Y(t, \omega) + Z(\omega) Y(t - 1, \omega)$$

où Z est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ de loi :

$$P(Z = 0) = 1 - \frac{3}{2}\theta, \quad P(Z = \pm 1) = \frac{\theta}{2}, \quad P(Z = \pm 2) = \frac{\theta}{4} \quad (0 < \theta < \frac{2}{3})$$

et indépendante de $Y(t, \omega)$.

1. Montrer que X est stationnaire au second ordre.
2. Déterminer P_X la puissance de X .
3. On suppose que $R_Y(\tau) = e^{-2\pi|\tau|}$. Déterminer S_X la densité spectrale de puissance de X .

Exercice 73 (*signal stationnaire au second ordre*)

Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et K une autre variable aléatoire discrète, indépendante de U , à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de loi $p_k = P(K = k)$. On définit le signal analogique $X(t, \omega)$ par :

$$X(t, \omega) = \cos(2\pi t K(\omega) + U(\omega))$$

1. X est-il stationnaire au second ordre?
2. Calculer P_X la puissance de X .
3. Déterminer S_X le spectre de puissance de X .

Exercice 74 (*filtre numérique*)

On considère un filtre numérique d'entrée X et la sortie Y :

$Y(n, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(n - k) X(k, \omega)$, où X est centré, stationnaire au second ordre de fonction d'autocorrélation R_X , de spectre de puissance S_X et la réponse impulsionnelle h est définie par :

$$h(n) = \begin{cases} \theta & \text{si } n \in \{1, 2\} \\ 1 - 4\theta & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

- 1) Déterminer le spectre de puissance de Y . En déduire R_Y .
- 2) Déterminer la fonction d'intercorrélation entrée/sortie : R_{XY} .

Annexe A

Intégrales doubles

Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$I_1 = \iint_{\{0 < x < 1, -1 < y < 1\}} (y - x) dx dy$$

$$I_2 = \iint_{\{-2 < x < y < 1\}} x^2 y dx dy$$

$$I_3 = \iint_{\{0 < x < y < 2\}} (y - x) dx dy$$

$$I_4 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} e^{-y} dx dy$$

$$I_5 = \iint_{\{0 < x < 1, -1 < x+y < 1\}} x dx dy$$

$$I_6 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} x e^{-y} dx dy$$

$$I_7 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} y e^{-y} dx dy$$

$$I_8 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} e^{-(x+y)} dx dy$$

$$I_9 = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} (y - x)^\alpha e^{-y} dx dy \quad (\alpha > 0)$$

$$I_{10} = \iint_{\{0 < x < 1, x+y < 3, y > 1\}} (x + y) dx dy$$

$$I_{11} = \int_0^\infty \int_0^\infty |y - x| e^{-\sup(x,y)} dx dy$$

$$I_{12} = \iint_{\{0 < x < 1, -1 < y < 2, 0 < x+y < 2\}} (x + y) dx dy$$

$$I_{13} = \iint_{]0,1[\times]0,1[} \frac{x}{1 + x^2 y^2} dx dy$$

$$I_{14} = \iint_{\{0 < x < y < \infty\}} \frac{e^{-x}}{1 + (y - x)^2} dx dy$$

$$I_{15} = \iint_{]0,\infty[\times]0,\infty[} \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$I_{16} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\alpha+1}} (\alpha > 0)$$

$$I_{17} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-x^2 + 2xy} dx dy$$

$$I_{18} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} x e^{-x^2 + xy - y^2} dx dy$$

$$I_{19} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} xy e^{-x^2 \pm xy - y^2} dx dy$$

$$I_{20} = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} (x + y) e^{-x^2 \pm 2xy - y^2} dx dy$$

Annexe B

Suites numériques réelles

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation:

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} \quad (E_1)$$

avec la condition initiale u_0 .

On cherche une solution de E_1 sous la forme $u_n = R^n$ avec $R \neq 0$. L'équation E_1 devient donc $R^{n-1}(\alpha R - \beta) = 0$, ce qui donne $R = \frac{\beta}{\alpha}$. Donc

la solution générale de E_1 est donnée par: $u_n = A \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$. La constante A est déterminée par la condition initiale u_0 , soit $A = u_0$. Donc

$$u_n = u_0 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation:

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} + \gamma \quad (E_2)$$

avec la condition initiale u_0 .

Posons $u_n = v_n + \lambda$. L'équation E_2 devient donc

$$\alpha v_n + \alpha \lambda = \beta v_{n-1} + \beta \lambda + \gamma$$

$$\alpha v_n = \beta v_{n-1} + \lambda(\beta - \alpha) + \gamma \quad (E'_2)$$

On choisit λ de sorte que $\lambda(\beta - \alpha) + \gamma = 0$, soit $\lambda = \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$

Donc, l'équation E'_2 devient $\alpha v_n = \beta v_{n-1}$ ce qui est de la forme E_1 . on a donc

$$v_n = v_0 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

avec $v_0 = u_0 - \lambda = u_0 - \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$. Donc

$$u_n = \left(u_0 - \frac{\gamma}{\alpha - \beta}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{\gamma}{\alpha - \beta}$$

3. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation:

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} + \gamma u_{n-2} \quad (E_3)$$

avec les conditions initiales u_0 et u_1 .

On cherche une solution de E_3 sous la forme $u_n = R^n$ avec $R \neq 0$. L'équation E_3 devient donc $R^{n-2} (\alpha R^2 - \beta R - \gamma) = 0$, soit

$$\alpha R^2 - \beta R - \gamma = 0 \quad (E'_3)$$

Notons $\Delta = \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$.

1. Si $\Delta > 0$, alors E'_3 admet deux racines distinctes:

$$R_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Donc, la solution générale de E_3 est donnée par:

$u_n = A R_1^n + B R_2^n$. Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 , soit

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha(u_0 R_2 - u_1)}{\Delta} \\ B = \frac{\alpha(u_1 - u_0 R_1)}{\Delta} \end{cases}$$

2. Si $\Delta = 0$, alors E'_3 admet une racine double: $R_0 = \frac{\beta}{2\alpha}$ et donc, la solution générale de E_3 est donnée par:

$u_n = A R_0^n + B n R_0^n$. Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales u_0 et u_1 , soit

$$\begin{cases} A = u_0 \\ B = \frac{2\alpha(u_1 - u_0)}{\beta} \end{cases}$$

4. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle vérifiant la relation:

$$\alpha u_n = \beta u_{n-1} + \gamma u_{n-2} + \delta \quad (E_4)$$

avec les conditions initiales u_0 et u_1 .

Posons: $u_n = v_n + \lambda$. L'équation E_4 devient donc

$$\alpha v_n = \beta v_{n-1} + \gamma v_{n-2} + \lambda(\beta + \gamma - \alpha) + \delta \quad (E'_4)$$

On choisit λ de sorte que $\lambda(\beta + \gamma - \alpha) + \delta = 0$ soit, $\lambda = \frac{\delta}{\alpha - \beta - \gamma}$

Donc, l'équation E'_4 devient $\alpha v_n = \beta v_{n-1} + \gamma v_{n-2}$ ce qui est de la forme E_3 .



Références



- [1] **Reinhard.H.** (1996). Éléments de Mathématiques du Signal.
Tome 2. Signaux Aléatoires. *Dunod, Paris.*
- [2] **Ghorbanzadeh.D.** (1998). Probabilités. Exercices corrigés.
Éditions Technip, Paris.
- [3] **Carbon.M. , Ghorbanzadeh.D. , Marry.P. , Point.N., Vial.D.**
(1997). Éléments de Mathématiques du Signal. Exercices résolus. *Dunod, Paris.*
- [4] **Billinsley.P.** (1979). Probability and Measure. *Wiley, New York.*
- [5] **Feller.W.** (1966 et 1971). An introduction to probability and its Applications. Volumes *I* et *II*. *Wiley, New York.*