MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Examen Session 1, 1er février 2017, durée : 3 heures

Les notes de cours personnelles et transmises lors des cours sont autorisées, sous forme papier et à l'exclusion de tout autre document. Les calculatrices sont interdites et inutiles. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Afin de faciliter la correction, merci de rédiger les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part, sur des copies séparées.

Exercice 1 : Série numérique

Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{|\sin(n)| + \ln(n)}{n^3 + \cos(n)}, \quad \forall\, n > 0.$

1) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le nombre u_n est bien défini.

2) Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. La série de terme général v_n est-elle convergente ?

3) Pour $n \geq 1$, on pose $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. Montrer que la suite w_n tend vers zéro si $n \longrightarrow +\infty$.

4) En déduire que la série de terme général u_n est absolument convergente.

5) La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 2 : Séries entières

1) Factoriser le polynôme $x^2 - 5x + 6$ en un produit de deux polynômes du premier degré.

2) On pose $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$. Utiliser le résultat précédent pour calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

3) Montrer que le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $f'(x)$ peut s'écrire : $S = A \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + B \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, et donner une expression des constantes A et $B \in \mathbb{R}$ ainsi que des suites a_n et b_n.

4) Quel est le rayon de convergence de la série entière S trouvée à la troisième question ?

5) En déduire le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.

François Dubois et Chloé Mimeau, 1 février 2017.

Exercice 3 : Série de Fourier
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\cos t|$.

1) Représenter rapidement la fonction f et montrer que f est périodique et que $f(t+\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel t.

2) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\mathrm{d}t$.

3) On se donne un entier naturel k supérieur ou égal à 1. Calculer les intégrales $J_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\cos\big(2kt\big)\,\mathrm{d}t$.

4) Montrer que les intégrales $L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\sin\big(2kt\big)\,\mathrm{d}t$ sont nulles pour tout entier k.

5) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction f.

6) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2(2k-1)^2}.$$

Rappel : Soit f une fonction T-périodique, alors les coefficients de sa décomposition en série de Fourier sont : $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$ et pour $k \geq 1$:
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt.$$

Formulaire : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$, $\cos^2(a) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2a)}{2}$,
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$,
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$.

Exercice 4 : Algèbre linéaire
On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.
On s'intéresse à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$.

1) Rappeler explicitement les vecteurs e_1, e_2 et e_3.

2) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire l'expression de l'application linéaire f.

3) Soit $w = (3,0,1) \in E$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $f(v) = w$ et déterminer ce vecteur v.

4) Déterminer Ker(f) (le noyau de f) et Im(f) (l'image de f).

5) Soient $v_1 = (1,1,1)$ et $v_2 = (1,-1,0)$. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, e_1\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

6) On note B la matrice de f exprimée dans la base $\mathscr{B}' = \{v_1, v_2, e_1\}$. Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice B.