Rque: on utilise souvent la notion de suite de Cauchy pour montrer qu'une suite n'est pas convergente.
Ce qui est toujours vrai est que toute suite convergente est de Cauchy (la réciproque est vraie par les nombres réels)
Pour démontrer qu'une suite n'est pas convergente on peut démontrer qu'elle n'est pas de Cauchy.

II Séries numériques

oct. 9-17:31

Définition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$, ... $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

En abrégé on parlera de la série de terme général u_n

Etudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

oct. 9-17:44

Exemples:

* La série harmonique est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$

$S_0 = u_0 = 1$
$S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{1}{2}$ $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$

* La série géométrique On se donne $\rho \in \mathbb{R}$ on considère la suite $u_n = \rho^n$

La série géométrique est la série de terme général u_n

$\rho = \frac{1}{2}$

$S_0 = 1$ $S_1 = 1 + \frac{1}{2}$ $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$

oct. 9-17:50

On se propose d'étudier la convergence des séries.

Déf.: On dira que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, ..., $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ converge.
Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on notera la limite de S_n sous la forme $\lim S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
"$\sum u_n$ converge". Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite on dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge
"$\sum u_n$ diverge"

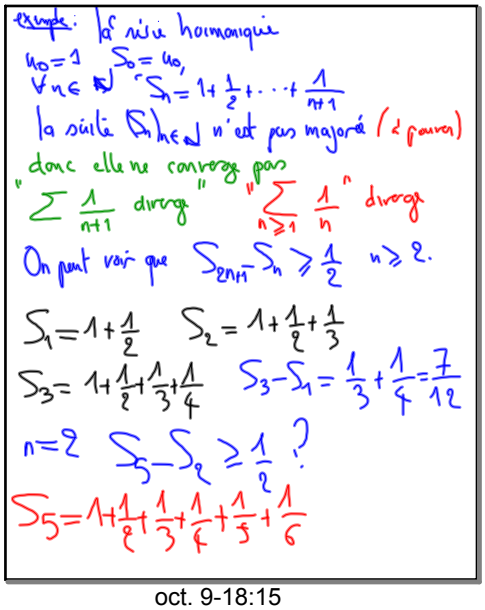
oct. 9-17:56

exemple $u_n = (-1)^n$
$S_0 = u_0 = 1$ $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + (-1) = 0$,
$S_2 = 1 + (-1) + 1 = 1$, ...,
S_n vaut soit 1 (si n est pair) soit 0 (si n est impair)
$\sum u_n$ diverge. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
On dispose du résultat suivant
Théorème Si la série de terme général u_n converge alors on a nécessairement $\lim u_n = 0$ | $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$
Si $\lim S_n = l$
alors $\lim S_{n+1} = l$ donc $\lim u_{n+1} = 0$.

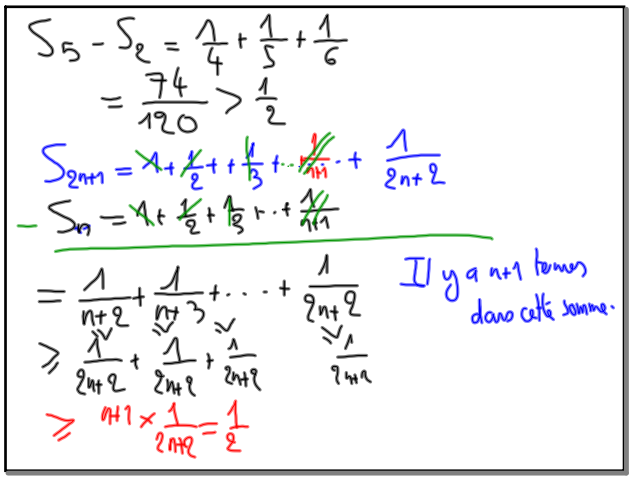
oct. 9-18:02

1) Cas des séries à termes positifs
On considère le cas où $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Dans cette situation la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$.
On a vu la dernière fois qu'une suite croissante et majorée est convergente.
On dispose du résultat plus précis
Théorème: Une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.

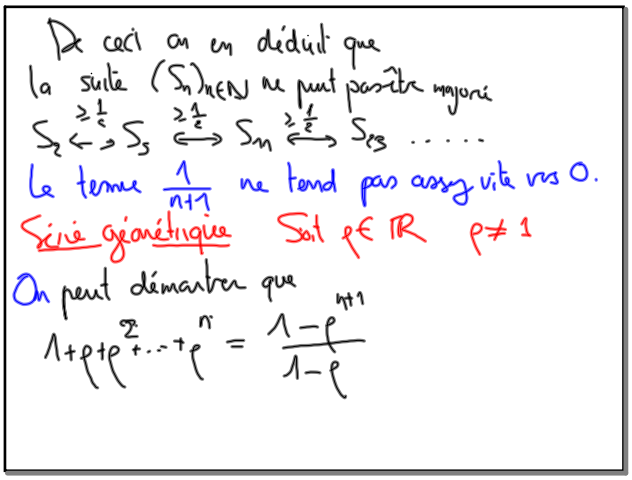
oct. 9-18:10



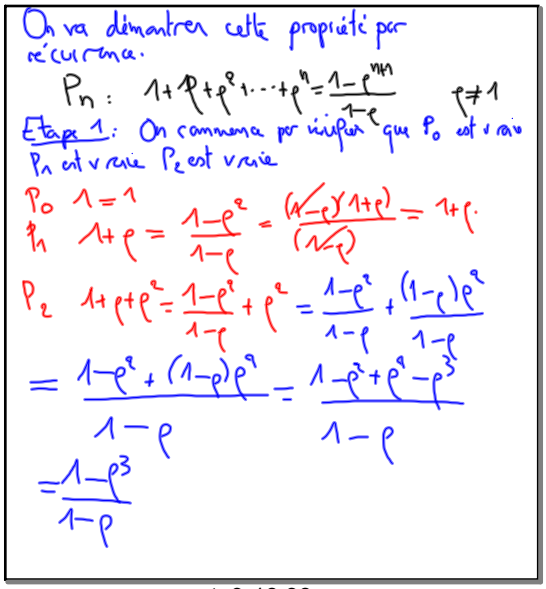
oct. 9-18:15



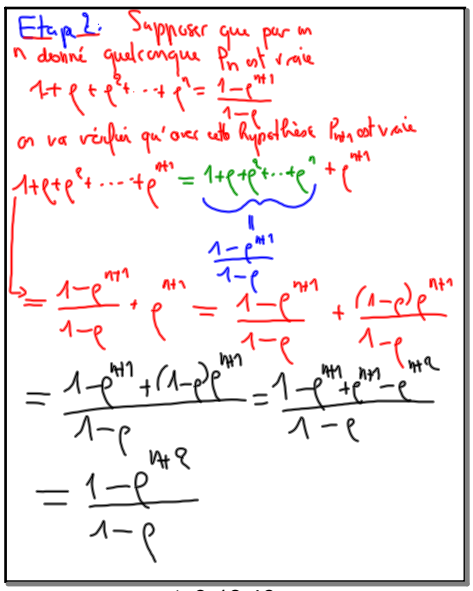
oct. 9-18:23



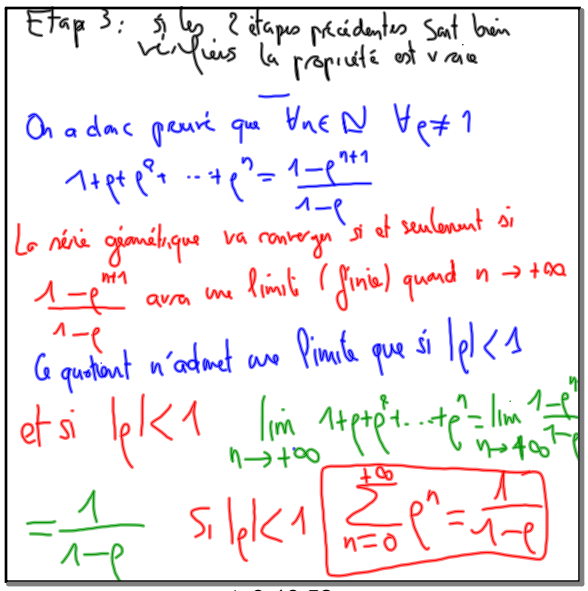
oct. 9-18:33



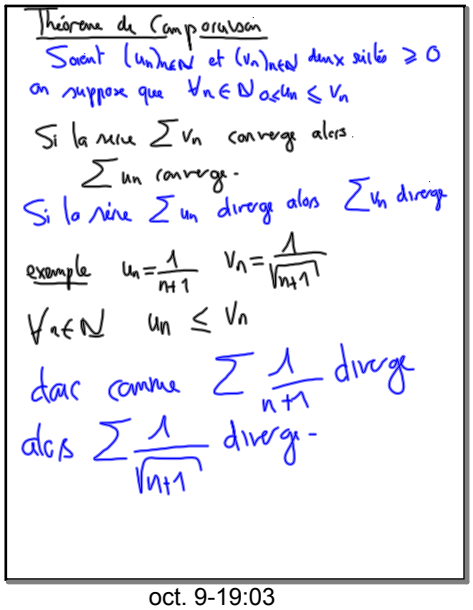
oct. 9-18:38



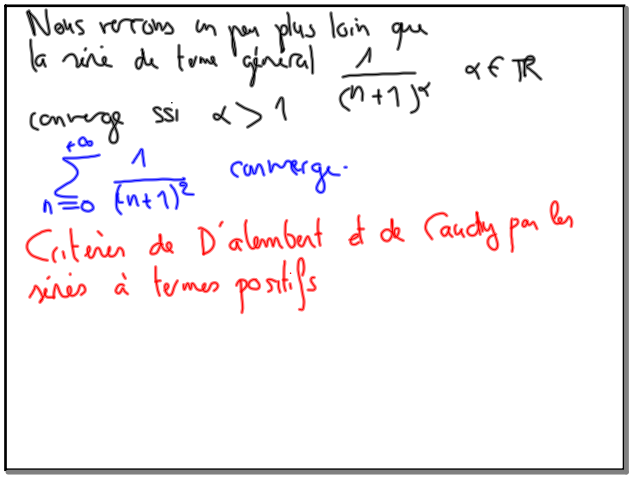
oct. 9-18:46



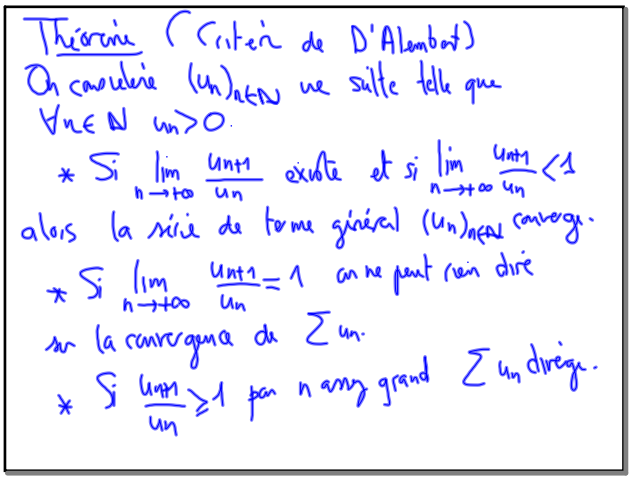
oct. 9-18:52



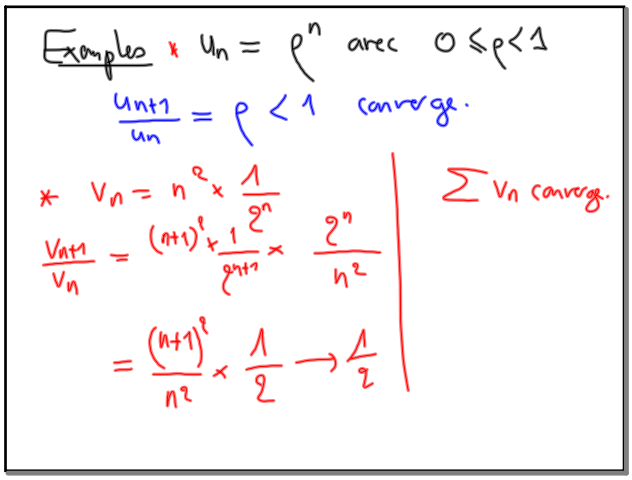
oct. 9-19:03



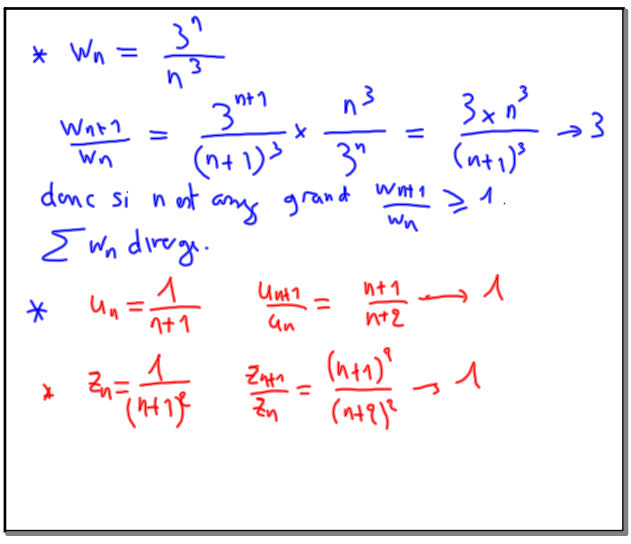
oct. 9-19:10



oct. 9-19:13



oct. 9-19:23



oct. 9-19:27