Théorème : Toute série de nombres réels (ou complexes) absolument convergente est convergente.

ex : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente

Par démonstration le théorème, il suffit de démontrer (il faut aussi) que la suite définie par

$u_0,\ u_0+u_1,\ u_0+u_1+u_2,\ \dots,\ u_0+u_1+\dots+u_n,\ \dots$

est une suite de Cauchy. $S_n = u_0+\dots+u_n$

oct. 23-17:41

Dire que S_n est une suite de Cauchy c'est dire que $|S_n - S_m|$ est arbitrairement petit pourvu que n et m soient grands

$|S_n - S_m| = |u_{m+1} + u_{m+2} \dots + u_n|$

$\leq |u_{m+1}| + \dots + |u_n|$ et cette inégalité permet de se ramener à la convergence absolue.

Remarque et définition : Il existe des séries qui sont convergentes mais qui ne sont pas absolument convergentes. On dit alors qu'une telle série est semi-convergente

oct. 23-17:48

exemples : $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

C'est une série semi-convergente. $|u_n| = \frac{1}{n}$

On a vu que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$ converge.

$1,\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$\cdot\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{6} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{5}{6} - \frac{1}{20}$

$= \frac{50}{60} - \frac{3}{60} = \frac{47}{60}$

oct. 23-17:54

Regardons les sommes d'un nombre pair de termes

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30}$

$= \frac{37}{60}$

oct. 23-18:02

Critère des séries alternées

Théorème On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = (-1)^n v_n$ où v_n est suite positive.

On suppose que v_n est décroissante et que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors sous ces hypothèses, $\sum u_n$ converge.

Rque : Il ne peut que $\sum v_n$ diverge.

oct. 23-18:09

exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n v_n$ $\quad v_n = \frac{1}{n}$

(v_n) est décroissante et v_n tend vers 0 en décroissant

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

* $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ $\quad n \geq 2$ $\quad \frac{1}{\ln(n)}$ est une suite positive décroissante qui tend vers 0

donc $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge

* $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une suite qui tend vers 0 en décroissant.

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

oct. 23-18:13

Remarque : l'utilisation du critère des séries alternées doit se faire de manière précise

ex $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ $\quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\cancel{\lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \Rightarrow u_n \sim v_n}$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente

oct. 23-18:19

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)}$$

$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+o(x^2)$ développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+x}$

$o(x^2)$ signifie $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$

$$\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 - \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o(\ldots\right.$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

Si $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est convergente alors comme

$$\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ldots}$$

Si $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ converge alors $\sum \frac{1}{n}$ aussi car toutes les autres suites de l'... donnent des séries convergentes. Or $\sum \frac{1}{n}$

oct. 23-18:23

ex $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + \left(\frac{(-1)}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2\right)\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+o(x^2)$$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$$

Chacun des quatre termes définit une série convergente, donc le terme de gauche de l'égalité est une série convergente

oct. 23-18:39

La conclusion de ces exemples est que lorsqu'on étudie une série semi-convergente on ne peut pas se contenter d'utiliser les équivalents

(Rappel : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(u_n)$

on utilise en général le fait que $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1 \Rightarrow u_n \sim v_n$.)

Il faut alors utiliser un développement limité à un ordre suffisant pour avoir l'absolue convergence.

oct. 23-18:46

Les séries semi-convergentes sont à manipuler avec précaution.
Une modification de l'ordre des termes peut changer la nature de cette série.

Théorème : Si (u_n) une suite telle que $\sum u_n$ est semi-convergente, quel que soit le nombre $A \in [-\infty, +\infty]$ il existe un réagencement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noté $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{n=0} v_n = A$

oct. 23-18:57

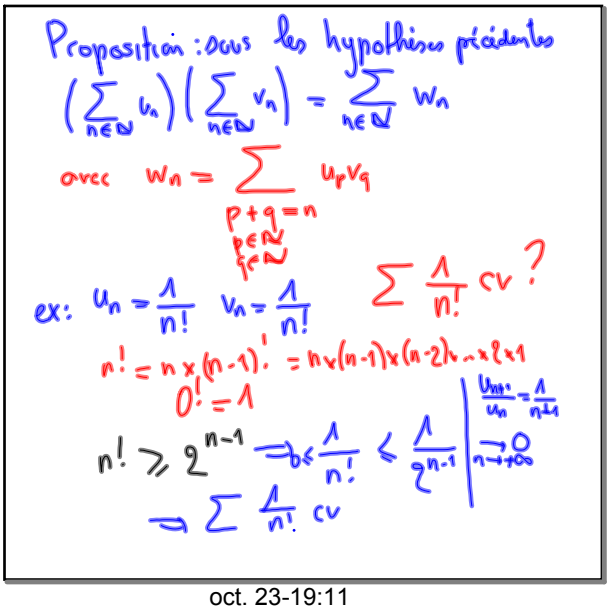
Produit de Cauchy de 2 séries

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites on suppose que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et que la série de terme général $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente

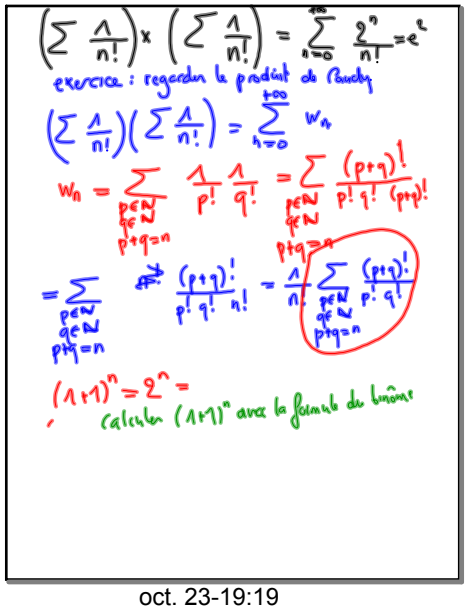
On se demande que dire de la manière de calculer.

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right)$$

oct. 23-19:05



oct. 23-19:11



oct. 23-19:19