Suites et séries de fonctions

I Suites de fonctions

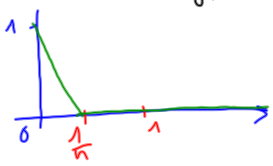
On se donne $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions qui dépendent d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$.

On va supposer que toutes les fonctions f_n sont définies sur la même intervalle I.

$\forall x \in I$, on peut considérer la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

exemple $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$



oct. 30-17:46

Si $x \geq 0$, la suite $f_n(x)$ converge vers un nombre qui dépend de x.

Si $x = 0$ $f_n(0) = 1$ cette suite converge car elle est constante.

Si $x > 0$, si n est assez grand alors on aura $\frac{1}{n} < x$ donc $f_n(x) = 0$ dès que n est assez grand donc si $x > 0$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

On résume ~~cette~~ ces calculs en disant que pour chaque $x \geq 0$ $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$

où f est la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \\ 0 \text{ si } x \end{cases}$

oct. 30-17:54

1) Notion de convergence simple

Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions toutes définies sur I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. On dira que la suite de fonctions f_n converge simplement vers f sur I, si $\forall x \in I$ $f_n(x) \to f(x)$. On note en abrégé

$f_n \xrightarrow[I]{} f$ simplement

La difficulté avec la convergence simple est que la fonction limite ~~ne~~ ne va en général pas conserver des propriétés de chaque fonction f_n

oct. 30-18:04

exemples :

* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - nx \text{ si } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$

Si $x \leq 0$ $f_n(x) = 1 \to 1$

Si $x > 0$ $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} < x$ $n > \frac{1}{x}$

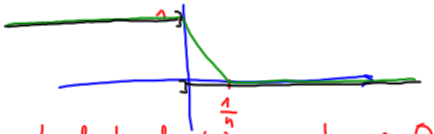
$f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{} f$ simplement où

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

oct. 30-18:10

Chaque fonction f_n est continue



Mais la fonction f n'est pas continue en 0

* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x \geq \frac{2}{n} \\ n^2 x \text{ si } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ n - (x - \frac{1}{n})n^2 \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \end{cases}$

oct. 30-18:19

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ dès que $n \geq 2$

$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x \geq \frac{2}{n} \\ n^2 x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n - n^2(x - \frac{1}{n}) \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \end{cases}$

Si $x \leq 0$ $f_n(x) = 0 \to 0$

Si $x > 0$ dès que $\frac{2}{n} < x$ $f_n(x) = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ si $x > 0$

Donc $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{} 0$ simplement

et $\int_0^1 0\,dx = 0$

oct. 30-18:30

La convergence simple ne permet pas de passer à la limite dans les intégrales

2) Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ des fonctions toutes définies sur I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dira que la suite de fonctions f_n converge uniformément vers f sur I si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n > N$, $\forall x \in I$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

↳ ne dépend que de ε mais pas de x.

oct. 30-18:36

Exemple : $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x \geq \frac{2}{n} \\ n^2 x \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n - n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) \text{ si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \end{cases}$

La suite de fonctions f_n ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. En effet $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$

$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0\right| = n$ cet écart là ne peut pas être rendu petit.

La convergence n'est pas uniforme

$\exists \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x$ tel que $|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$. $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$x_n = \frac{1}{n}$

oct. 30-18:44

* $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$

La suite de f_n va converger simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Si $a \in [0,1[$

f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $[0,a]$. La suite f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

oct. 30-18:52

* Si $x = 1$ $f_n(x) = 1^n = 1 \to 1$

Si $0 \leq x < 1$ $f_n(x) = x^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Donc $f_n \underset{[0,1]}{\to} f$ simplement.

* Soit $a \in [0,1[$ on a donc $0 \leq a < 1$

si $x \in [0,a]$ $1 - x \geqslant 1 - a > 0$

a étant fixé $f_n \underset{[0,a]}{\to} f$ uniformément mais sur $[0,a]$ la fonction f est nulle.

oct. 30-18:58

$\forall x \in [0,a]$ $0 \leqslant f_n(x) = x^n \leqslant a^n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ donc si on choisit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\forall n > N$ $0 \leq a^n < \varepsilon$

par ce même N, $\forall x \in [0,a]$ $0 \leq x^n < \varepsilon$

* Il n'y a pas convergence sur l'intervalle $[0,1]$. vers la fonction f.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{e}$

oct. 30-19:08

Si f_n convergeait uniformément vers f sur $[0,1]$, on devrait avoir $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \to e^{-1}$

$n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

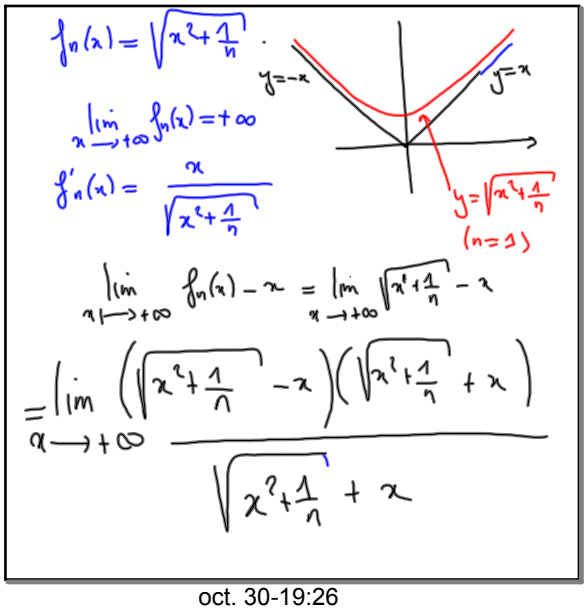
$= -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n}} \to -1$

$\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$

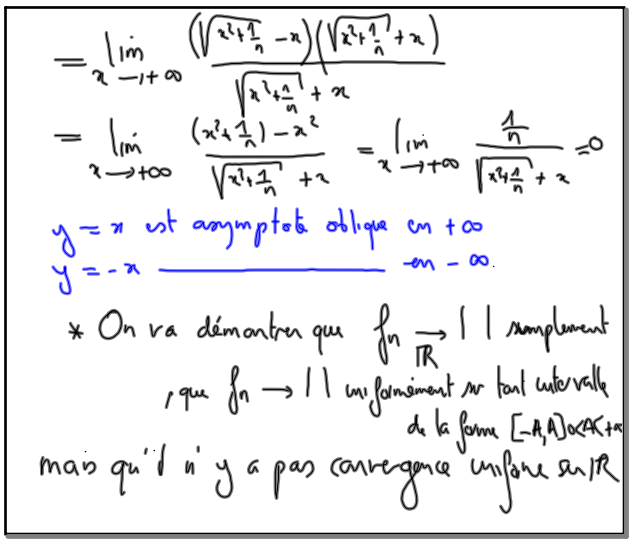
$\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u) - \ln(1)}{u}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$

oct. 30-19:18



oct. 30-19:26



oct. 30-19:35