



Groupe de travail Systèmes Dynamiques

Le problème des cordes en cosmologie: une première explication

Ph Durand

CNAM PARIS

28 mai 2009

Plan de l'exposé

1 Introduction

Plan de l'exposé

- ➊ Introduction
- ➋ Quête d'unification et de généralisation

Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Quête d'unification et de généralisation
- ③ Du calcul différentiel à la relativité générale

Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Quête d'unification et de généralisation
- ③ Du calcul différentiel à la relativité générale
- ④ Notion de singularité : bâtir une géométrie de l'infiniment petit

Plan de l'exposé

- ① Introduction
- ② Quête d'unification et de généralisation
- ③ Du calcul différentiel à la relativité générale
- ④ Notion de singularité : bâtir une géométrie de l'infiniment petit
- ⑤ La physique des champs et des cordes

Plan de l'exposé

- ➊ Introduction
- ➋ Quête d'unification et de généralisation
- ➌ Du calcul différentiel à la relativité générale
- ➍ Notion de singularité : bâtir une géométrie de l'infiniment petit
- ➎ La physique des champs et des cordes
- ➏ Les modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes

Plan de l'exposé

- ➊ Introduction
- ➋ Quête d'unification et de généralisation
- ➌ Du calcul différentiel à la relativité générale
- ➍ Notion de singularité : bâtir une géométrie de l'infiniment petit
- ➎ La physique des champs et des cordes
- ➏ Les modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes
- ➐ Les autres voies de recherches pour expliquer la gravité quantique

Plan de l'exposé

- ➊ Introduction
- ➋ Quête d'unification et de généralisation
- ➌ Du calcul différentiel à la relativité générale
- ➍ Notion de singularité : bâtir une géométrie de l'infiniment petit
- ➎ La physique des champs et des cordes
- ➏ Les modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes
- ➐ Les autres voies de recherches pour expliquer la gravité quantique
- ➑ Autour de ses thèmes et en synergie avec les systèmes dynamiques

Introduction

Le modèle standard

La mécanique quantique et la théorie des particules débouchent à la fin des années 70 sur le modèle standard qui recense les particules connues à ce jour et leurs interactions.

Introduction

Le modèle standard

La mécanique quantique et la théorie des particules débouchent à la fin des années 70 sur le modèle standard qui recense les particules connues à ce jour et leurs interactions.

défaut

Ce modèle n'est pas parfait et il est trop descriptif : Il cartographie essentiellement les résultats fournis par les accélérateurs de particules.

Introduction

Le modèle standard

La mécanique quantique et la théorie des particules débouchent à la fin des années 70 sur le modèle standard qui recense les particules connues à ce jour et leurs interactions.

défaut

Ce modèle n'est pas parfait et il est trop descriptif : Il cartographie essentiellement les résultats fournis par les accélérateurs de particules.

Les cordes

La théorie des cordes serait une alternative pour décrire les objets du modèle standard : selon la fréquence de sa vibration, la corde redonne telle ou telle particule. On distingue cordes ouvertes et cordes fermées.

Quête d'unification et de généralisation

En physique :

Electrostatique et magnétostatique donnent l'electromagnétisme. La matière, l'énergie, l'espace et le temps, entités distinctes, sont unifiés premièrement en l'espace et le temps (relativité restreinte). L'espace temps couplé à la matière-énergie ($E = Mc^2$) fournit l'unification macroscopique, la relativité générale.

Quête d'unification et de généralisation

En physique :

Electrostatique et magnétostatique donnent l'électromagnétisme. La matière, l'énergie, l'espace et le temps, entités distinctes, sont unifiées premièrement en l'espace et le temps (relativité restreinte). L'espace temps couplé a la matière-énergie ($E = Mc^2$) fournit l'unification macroscopique, la relativité générale.

En Mathématiques :

Au début est l'arithmétique et la géométrie (Thalès, Pythagore) puis vint l'algèbre (al-jabr en arabe) et l'analyse (Leibniz) enfin Poincaré définit la topologie, les unifications sont nombreuses : géométrie algébrique, géométrie arithmétique, géométrie différentielle, topologie algébrique...etc....

Electromagnétisme, Gravitation

Electromagnétisme :

Thalès de Milet (—600 AvJC), découvre l'électrisation en frottant un morceau d'ambre sur une peau de chat, et en 1600 le mot électrique (ambre en grec) est inventé par William Gilbert. C'est Coulomb en 1785 qui dégage les lois de l'électrostatique. Les aimants sont connus depuis les Grecs, Franklin découvre l'effet des orages sur les boussoles (1752), mais c'est en 1820 Que Oersted, Biot et Savart découvre le lien entre courant et boussole, l'électromagnetisme est né et il revient à Maxwell la construction d'une théorie synthétique : Les équations de Maxwell (1873).

Electromagnétisme, Gravitation

Gravitation :

Premières tentatives : Aristote ($-384AvJC$) déclare "plus un corps pèse, plus il tombe vite". Ce modèle est réfuté par Galilé qui comprend que cela est dû à la "résistance de l'air", pour lui la vitesse est proportionnelle au temps de chute, il en déduit la constante g avec deux décimales ! Newton base la mécanique sur la notion nouvelle d'accélération et ainsi découvre que deux corps s'attirent en raison inverse du carré de leur distance. Enfin, la théorie de la relativité d'Einstein montre que toute propagation a une vitesse bornée et sa théorie débouche sur une vision géométrique de la gravitation (qui perd son statut de force).

Du calcul différentiel à la relativité générale

Introduction : le déterminisme

La physique suit dans un premier temps les mathématiques : le domaine du certain est roi. Newton qui invente le calcul différentiel, prédit la trajectoire des objets, presque partout les courbes, les surfaces sont lisses, même au niveau des particules on étudie des trajectoires lisses (particules dans un champ magnétique, modèle simpliste de l'atome d'hydrogène).

Du calcul différentiel à la relativité générale

Introduction : le déterminisme

La physique suit dans un premier temps les mathématiques : le domaine du certain est roi. Newton qui invente le calcul différentiel, prédit la trajectoire des objets, presque partout les courbes, les surfaces sont lisses, même au niveau des particules on étudie des trajectoires lisses (particules dans un champ magnétique, modèle simpliste de l'atome d'hydrogène).

Le calcul différentiel

Le calcul différentiel et infinitésimal fut mise en place par Newton et Leibniz au même moment que la théorie de la gravitation. Comme son nom l'indique, il explore localement un espace de configurations. Mais déjà l'intégration, les équations différentielles montrent la nécessité d'une compréhension globale et donne naissance à la géométrie différentielle et plus tard à la topologie algébrique.

Le concept de forme différentielle

- Formule de base du calcul différentiel :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h) \quad (*)$$

$$L_{x_0}(h) = A.h (= df_{x_0}(h))$$

est ici une fonction linéaire appelée différentielle au point x_0 et

$A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0

Le concept de forme différentielle

- Formule de base du calcul différentiel :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h) \quad (*)$$

$$L_{x_0}(h) = A.h (= df_{x_0}(h))$$

est ici une fonction linéaire appelée différentielle au point x_0 et

$A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0

- Cela permet d'extraire un nouvel objet : la forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Le concept de forme différentielle

- Formule de base du calcul différentiel :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h) \quad (*)$$

$$L_{x_0}(h) = A.h (= df_{x_0}(h))$$

est ici une fonction linéaire appelée différentielle au point x_0 et

$A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0

- Cela permet d'extraire un nouvel objet : la forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- De disposer d'un outils permettant de comprendre la topologie d'un ouvert, puis d'une variété

Le concept de forme différentielle

- Formule de base du calcul différentiel :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h) \quad (*)$$

$$L_{x_0}(h) = A.h (= df_{x_0}(h))$$

est ici une fonction linéaire appelée différentielle au point x_0 et

$A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0

- Cela permet d'extraire un nouvel objet : la forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- De disposer d'un outils permettant de comprendre la topologie d'un ouvert, puis d'une variété
- Qui peut être algébrisée et donner naissance au calcul tensoriel, aux formes différentielles de degré supérieur

Le concept de forme différentielle

- Formule de base du calcul différentiel :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h) \quad (*)$$

$$L_{x_0}(h) = A.h (= df_{x_0}(h))$$

est ici une fonction linéaire appelée différentielle au point x_0 et $A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0

- Cela permet d'extraire un nouvel objet : la forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- De disposer d'un outils permettant de comprendre la topologie d'un ouvert, puis d'une variété
- Qui peut être algébrisée et donner naissance au calcul tensoriel, aux formes différentielles de degré supérieur
- Donner naissance à l'analyse tensorielle sur une variété et à sa compréhension topologique.

Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

- La considération des formes différentielles de degré 1 permet déjà de comprendre la topologie d'un voisinage : dans $\mathbb{R}$ tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme différentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). En termes savants on a un complexe de chaîne ($d \circ d = 0$) :

$$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$$

Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

- La considération des formes différentielles de degré 1 permet déjà de comprendre la topologie d'un voisinage : dans $\mathbb{R}$ tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme différentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). En termes savants on a un complexe de chaîne ($d \circ d = 0$) :

$$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$$

- Ce résultat n'est plus vrai dans $\mathbb{R}^2$. Prenons une fonction numérique f à deux variables de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U dont l'ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions en question peut être vu comme l'ensemble des 0-formes différentielles de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur U noté $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

- La considération des formes différentielles de degré 1 permet déjà de comprendre la topologie d'un voisinage : dans $\mathbb{R}$ tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme différentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). En termes savants on a un complexe de chaîne ($d \circ d = 0$) :

$$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$$

- Ce résultat n'est plus vrai dans $\mathbb{R}^2$. Prenons une fonction numérique f à deux variables de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U dont l'ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des fonctions en question peut être vu comme l'ensemble des 0-formes différentielles de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur U noté $\mathcal{C}^\infty(U)$.
- On peut différentier f on obtient une 1-formes différentielles (Cela correspond en physique à prendre l'opérateur gradient). Le processus peut continuer, dans $\mathbb{R}^2$: la dérivée d'une 1- forme est son rotationnel, on a alors une flèche de plus dans le schéma vu ci-dessus :

$$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} \Omega_2(U) \xrightarrow{d} 0$$

L'Analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Dans le langage de l'ingénieur on retrouve le refrain explicite :

L'Analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Dans le langage de l'ingénieur on retrouve le refrain explicite :

Analyse vectorielle à deux variables

-Complexe de De Rham d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\text{Grad}} \Omega_1(U) \xrightarrow{\text{Rot}} \Omega_2(U) \longrightarrow 0$$

$$\underline{\text{Rot}(\text{grad}) = 0}$$

L'Analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- Dans le langage de l'ingénieur on retrouve le refrain explicite :

Analyse vectorielle à deux variables

-Complexe de De Rham d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\text{Grad}} \Omega_1(U) \xrightarrow{\text{Rot}} \Omega_2(U) \longrightarrow 0$$

$$\underline{\text{Rot}(\text{grad}) = 0}$$

Analyse vectorielle à trois variables

-Complexe de De Rham d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{\text{Grad}} \Omega_1(U) \xrightarrow{\text{Rot}} \Omega_2(U) \xrightarrow{\text{Div}} \Omega_3(U) \longrightarrow 0$$

$$\underline{\text{Rot}(\text{Grad}) = 0} \text{ et } \underline{\text{Div}(\text{Rot}) = 0}$$

- Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle c'est dire que f appartient au noyau de d : $\text{Ker } d$, donc que f est localement constante (i.e constante par composante connexe). Ce noyau renseigne donc sur la connexité de U . En mathématiques, on pose $H_0(U) = \text{Ker } d$. Mais on peut dire des choses supplémentaires :

- Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle c'est dire que f appartient au noyau de d : $\text{Ker } d$, donc que f est localement constante (i.e constante par composante connexe). Ce noyau renseigne donc sur la connexité de U . En mathématiques, on pose $H_0(U) = \text{Ker } d$. Mais on peut dire des choses supplémentaires :
- Dire qu'une 1 forme est exacte, c'est dire qu'elle provient de la différentielle d'une fonction (ou d'un champ de gradients) elle est alors dans l'image de l'opérateur d : $\text{Im } d$. On sait alors que son rotationnel est nul (une forme exacte est fermée). L'obstruction à la réciproque de cette assertion est exactement ce qui est contenu dans le premier groupe de cohomologie : $H_1(U) = \text{Ker } d / \text{Im } d$.

- Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle c'est dire que f appartient au noyau de d : $\text{Ker } d$, donc que f est localement constante (i.e constante par composante connexe). Ce noyau renseigne donc sur la connexité de U . En mathématiques, on pose $H_0(U) = \text{Ker } d$. Mais on peut dire des choses supplémentaires :
- Dire qu'une 1 forme est exacte, c'est dire qu'elle provient de la différentielle d'une fonction (ou d'un champ de gradients) elle est alors dans l'image de l'opérateur d : $\text{Im } d$. On sait alors que son rotationnel est nul (une forme exacte est fermée). L'obstruction à la réciproque de cette assertion est exactement ce qui est contenu dans le premier groupe de cohomologie : $H_1(U) = \text{Ker } d / \text{Im } d$.
- L'itération de ce procédé définit la cohomologie de De Rham. C'est un outils algébrique puissant permettant la compréhension de la topologie d'objets non triviaux, on entre dans le domaine de la topologie algébrique

Exemple d'Objet avec lequel travail un topologue algébriste

Homotopie d'un complexe de chaîne

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{n+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) & \longrightarrow \\ & \downarrow i \quad \downarrow i' & & \downarrow i \quad \downarrow i' & & \downarrow i \quad \downarrow i' & \\ \longrightarrow & C_{n+1}(K \times I) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(K \times I) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K \times I) & \longrightarrow \end{array}$$

K_n K_{n-1}

Algébrisation calcul et analyse tensorielle

- Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de E^* , en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre E et E^{**} , prouve qu'on ne peut rien créer de nouveau. Vecteurs et formes permettent de créer le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_p^*(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^* \otimes e_{\rho(2)}^* \otimes \dots \otimes e_{\rho(p)}^*(x_1, \dots, x_p)$ ou plus généralement :
 $T = t_i^{jk} e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$

Algébrisation calcul et analyse tensorielle

- Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de E^* , en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre E et E^{**} , prouve qu'on ne peut rien créer de nouveau. Vecteurs et formes permettent de créer le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_p^*(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^* \otimes e_{\rho(2)}^* \otimes \dots \otimes e_{\rho(p)}^*(x_1, \dots, x_p)$ ou plus généralement :
$$T = t_i^{jk} e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$$
- On peut étendre ces définitions sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et définir des formes différentielles de degrés quelconques :
$$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Algébrisation calcul et analyse tensorielle

- Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de E^* , en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre E et E^{**} , prouve qu'on ne peut rien créer de nouveau. Vecteurs et formes permettent de créer le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_p^*(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^* \otimes e_{\rho(2)}^* \otimes \dots \otimes e_{\rho(p)}^*(x_1, \dots, x_p)$ ou plus généralement :
$$T = t_i^{jk} e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$$
- On peut étendre ces définitions sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et définir des formes différentielles de degrés quelconques :
$$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$
- Tout cela est le germe du calcul tensoriel local. Il reste à passer au global et pour cela disposer d'objets plus riches que les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Il faut définir des variétés abstraites.

Le vocabulaire de la géométrie différentielle

Géométrie différentielle

Pour pouvoir résoudre des problèmes globaux, les ouverts de $\mathbb{R}^n$, ou même $\mathbb{R}^n$ ne suffisent pas, penser par exemple à la constructions de solutions maximales d'équations différentielles, l'espace des phases peut avoir une topologie non triviale. Il faut construire des objets qui généralisent les ouverts.

Le vocabulaire de la géométrie différentielle

Géométrie différentielle

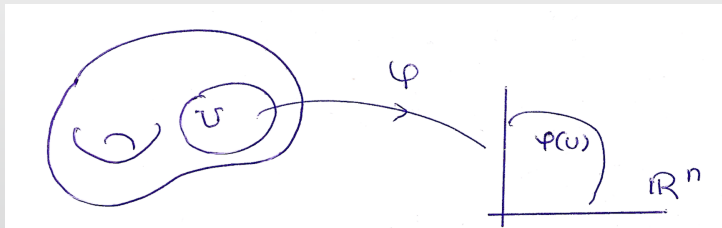
Pour pouvoir résoudre des problèmes globaux, les ouverts de $\mathbb{R}^n$, ou même $\mathbb{R}^n$ ne suffisent pas, penser par exemple à la construction de solutions maximales d'équations différentielles, l'espace des phases peut avoir une topologie non triviale. Il faut construire des objets qui généralisent les ouverts.

Variété

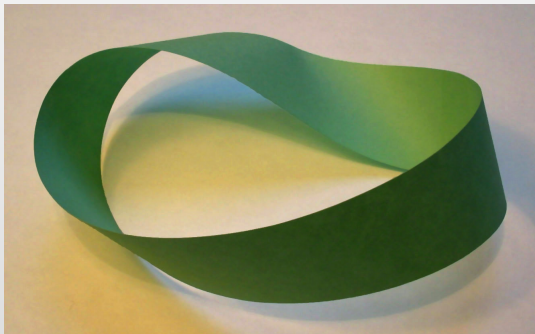
Une variété topologique est un objet qui est localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une variété différentiable est un objet qui est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Variété topologique

Lecture dans une carte



Une variété topologique : Le ruban de möbius



Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.

Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.
- Définition On dit que M est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si :
 - M est une variété topologique
 - Les changements de cartes sont de classe $\mathcal{C}^r$:Il existe un atlas réunion des (U_i, φ_i) tel que : $\forall (i, j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$.

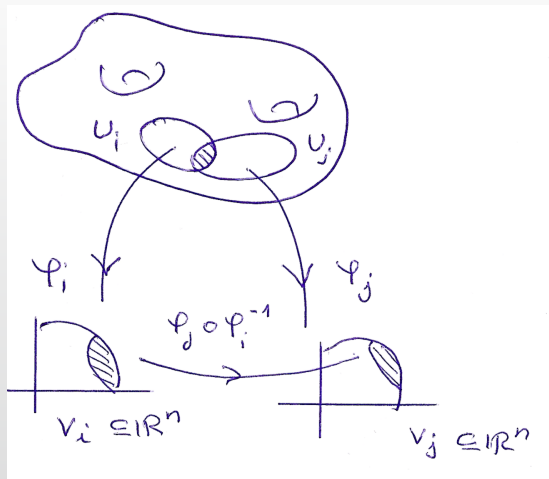
Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.
- Définition On dit que M est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si :
 - M est une variété topologique
 - Les changements de cartes sont de classe $\mathcal{C}^r$:
Il existe un atlas réunion des (U_i, φ_i) tel que : $\forall (i, j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$.
- On dira qu'une fonction f de la variété M dans $\mathbb{R}$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ quand pour toute carte locale (U, φ) l'application :
 $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et de classe $\mathcal{C}^r$

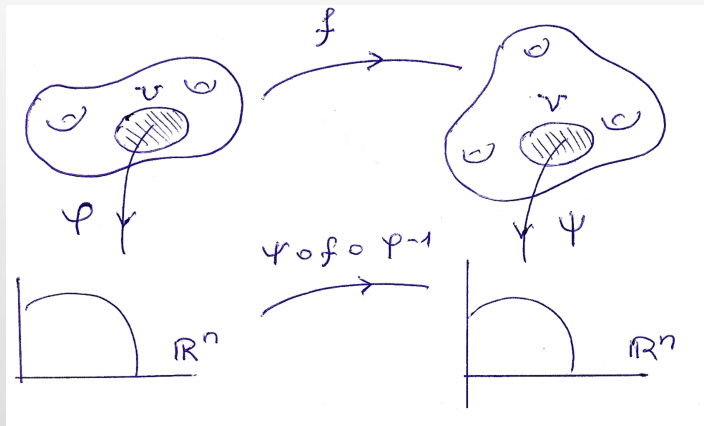
Variétés différentiables

- Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.
- Définition On dit que M est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si :
 - M est une variété topologique
 - Les changements de cartes sont de classe $\mathcal{C}^r$:
Il existe un atlas réunion des (U_i, φ_i) tel que : $\forall (i, j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$
 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$.
- On dira qu'une fonction f de la variété M dans $\mathbb{R}$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ quand pour toute carte locale (U, φ) l'application :
 $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et de classe $\mathcal{C}^r$
- Coordonnées locales Soit (U, φ) une carte locale de la variété différentiable M pour tout point p de l'ouvert U , $\varphi(p)$ peut s'écrire :
 $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$.
On dira que $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ sont les coordonnées de p lues dans la carte (U, φ)

Variété différentiable



Application différentiable entre variétés



Espace tangent : première approche

- Une sphère est un cas particulier très simple de variété. On a l'habitude de la voir plongée dans un l'espace $\mathbb{R}^3$. On visualise donc bien l'espace tangent en un point p de la dite sphère : il s'agit du plan tangent à la sphère au point p . Cependant, nous aimerions construire cet espace de manière intrinsèque sans faire référence à l'espace extérieur ; deux constructions existent et elles sont bien sûr équivalentes.

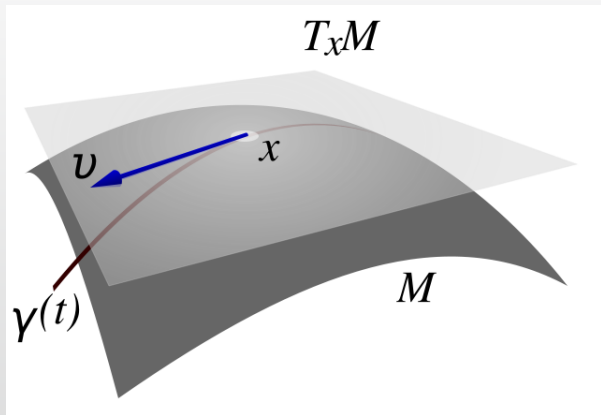
Espace tangent : première approche

- Une sphère est un cas particulier très simple de variété. On a l'habitude de la voir plongée dans un l'espace $\mathbb{R}^3$. On visualise donc bien l'espace tangent en un point p de la dite sphère : il s'agit du plan tangent à la sphère au point p . Cependant, nous aimerions construire cet espace de manière intrinsèque sans faire référence à l'espace extérieur ; deux constructions existent et elles sont bien sûr équivalentes.
- Première approche : tangentes à une courbe. Soit p un point de la variété M . On note $\mathcal{C}$, l'ensemble des courbes $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M$ telles que $\gamma(0) = p$. Alors il existe un ε assez petit pour que l'image de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ soit inclus dans un ouvert de carte U . Notons (U, φ) , la carte en question et x^i les applications coordonnées sur cette carte. Alors la relation binaire ci dessous est une relation d'équivalence :

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \left(\frac{dx^i(\gamma(t))}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{dx^i(\gamma'(t))}{dt} \right)_{t=0}$$

Par définition l'espace tangent en p est l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{C}$ pour cette relation.

Vecteur tangent



Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M noté :

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M noté :

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

- Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U(\text{ouvert}) \subset M, p \in U \mid f|_U = g|_U$$

On note $\tilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M noté :

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

- Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U(\text{ouvert}) \subset M, p \in U \mid f|_U = g|_U$$

On note $\tilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

- On appelle dérivation une application de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait la règle de Leibniz.

Espace tangent : Deuxième approche

- Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M noté :

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

- Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U(\text{ouvert}) \subset M, p \in U \mid f|_U = g|_U$$

On note $\tilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

- On appelle dérivation une application de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait la règle de Leibniz.
- Espace tangent en p en coordonnées locales, une base de $T_p(M)$ est donnée par les n -dérivations : $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ dont les courbes associées sont les γ_i définies par :

$$x^i(\gamma_j(t)) = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } x^i(\gamma_i(t)) = t$$

Par suite, on notera $X^i(p)$ les coordonnées d'un vecteur tangent dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Ainsi un vecteur tangent s'écrit en coordonnées locales :

$$X(p) = X^i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point p de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans $T_p M$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.

Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point p de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans $T_p M$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand p parcourt la variété M s'appelle le fibré tangent et est noté $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$.

Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point p de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans $T_p M$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand p parcourt la variété M s'appelle le fibré tangent et est noté $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$.
- Notations : L'application $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de TM sur M . Une section est une application X de M dans TM telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.

Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point p de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans $T_p M$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand p parcourt la variété M s'appelle le fibré tangent et est noté $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$.
- Notations : L'application $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de TM sur M . Une section est une application X de M dans TM telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.
- On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ une application D de $\mathcal{F}(M)$ dans lui même qui vérifie la relation de Leibniz : $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Par exemple, un champ de vecteurs définit une dérivation par la relation : $(X.f)(p) = X(p).f$

Fibré tangent et champ de vecteurs

- En chaque point p de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans $T_p M$ cette application s'appelle un champ de vecteurs.
- La réunion de tous les espaces tangents quand p parcourt la variété M s'appelle le fibré tangent et est noté
$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$
- Notations : L'application $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de TM sur M . Une section est une application X de M dans TM telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.
- On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ une application D de $\mathcal{F}(M)$ dans lui même qui vérifie la relation de Leibniz :
$$D(fg) = D(f)g + fD(g).$$
 Par exemple, un champ de vecteurs définit une dérivation par la relation : $(X.f)(p) = X(p).f$
- Crochet de Lie : l'application : $[X, Y] = XY - YX$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs et c'est une dérivation (grâce au lemme de Schwarz), son expression locale est : $[X, Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$

Le vocabulaire de la géométrie Riemannienne

Géométrie Riemannienne

Pour pouvoir faire des mesures de distances, calculer des aires, parler de courbures ou d'orthogonalité il faut une structure euclidienne c'est à dire définir un produit scalaire sur chaque espace tangent.

Variété riemannienne

Une variété riemannienne est une variété différentielle dans laquelle on définit un produit scalaire sur chaque espace tangent qui varie de manière lisse.

Le trépas du calcul tensoriel

Dans le cadre riemannien le calcul tensoriel s'exprime pleinement : le produit scalaire est un deux-tenseur symétrique, on pourra définir la courbure à l'aide d'un tenseur : le tenseur de Riemann

Variété riemannienne, métrique, connexion

- Définition : On appelle Variété Riemannienne un couple (M, g) dans lequel M est une variété différentiable et g un champ $\mathcal{C}^\infty$ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. :

$$p \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

On rappelle l'expression locale d'une telle métrique :

$$p \rightarrow g_{i,j}(p) dx^i(p) \otimes dx^j(p)$$

Variété riemannienne, métrique, connexion

- Définition : On appelle Variété Riemannienne un couple (M, g) dans lequel M est une variété différentiable et g un champ C^∞ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. :

$$p \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

On rappelle l'expression locale d'une telle métrique :

$$p \rightarrow g_{i,j}(p) dx^i(p) \otimes dx^j(p)$$

- On appelle connexion linéaire notée $\nabla_X Y$ l'application bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ qui satisfait aux trois règles de bilinéarité suivantes :

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

Ainsi que la règle de Leibniz :

$$\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$$

On peut remplacer Y par n'importe quel tenseur.

Variété riemannienne, métrique, connexion

- Définition : On appelle Variété Riemannienne un couple (M, g) dans lequel M est une variété différentiable et g un champ C^∞ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. :

$$p \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

On rappelle l'expression locale d'une telle métrique :

$$p \rightarrow g_{i,j}(p) dx^i(p) \otimes dx^j(p)$$

- On appelle connexion linéaire note $\nabla_X Y$ l'application bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ qui satisfait aux trois règles de bilinéarité suivantes :

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

Ainsi que la règle de Leibniz :

$$\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$$

On peut remplacer Y par n'importe quel tenseur.

- En coordonnées locales $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \Gamma_{i,k}^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, les $\Gamma_{i,k}^j$ sont les symboles de Christoffel et déterminent la connexion.

Connexion de Levi-civita

- Le formalisme précédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :

Connexion de Levi-civita

- Le formalisme précédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :
- une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma_{i,k}^j = \Gamma_{k,i}^j$

Connexion de Levi-civita

- Le formalisme précédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :
- une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma_{i,k}^j = \Gamma_{k,i}^j$
- une connexion est compatible avec la métrique si :
$$X.(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Ce qui équivaut à : $\nabla_X g = 0$.

Connexion de Levi-civita

- Le formalisme précédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :
- une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma_{i,k}^j = \Gamma_{k,i}^j$
- une connexion est compatible avec la métrique si :
$$X.(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Ce qui équivalent à : $\nabla_X g = 0$.
- Connexion de Levi-Civita : c'est l'unique connexion symétrique (sans torsion), compatible avec la métrique sur une variété riemannienne. Les symboles de Christoffel sont déterminés en fonction de la métrique :
$$\Gamma_{j,k}^i = \frac{1}{2} g^{i,h} \left(\frac{\partial g_{k,h}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{j,h}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_h} \right)$$

dans cette expression $g^{i,h}$ désigne la matrice inverse de la métrique.

Dérivation covariante, transport parallèle

- La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :

Dérivation covariante, transport parallèle

- La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :
- Si on translate un vecteur le long d'une courbe : $\mathcal{C}$, l'angle entre ce vecteur et un vecteur tangent à la courbe change si cette dernière n'est pas une droite ; le produit scalaire est conservé dans l'opération de translation d'un couple de vecteurs ; le vecteur directeur d'une droite est translaté le long de cette droite.

Dérivation covariante, transport parallèle

- La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :
- Si on translate un vecteur le long d'une courbe : $\mathcal{C}$, l'angle entre ce vecteur et un vecteur tangent à la courbe change si cette dernière n'est pas une droite ; le produit scalaire est conservé dans l'opération de translation d'un couple de vecteurs ; le vecteur directeur d'une droite est translaté le long de cette droite.
- Transport parallèle le long d'une courbe On considère maintenant une courbe $t \in [a, b] \rightarrow c(t) \in (M, g)$. On dit qu'un vecteur Y est déplacé parallèlement le long de la courbe c quand :

$$\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = 0$$

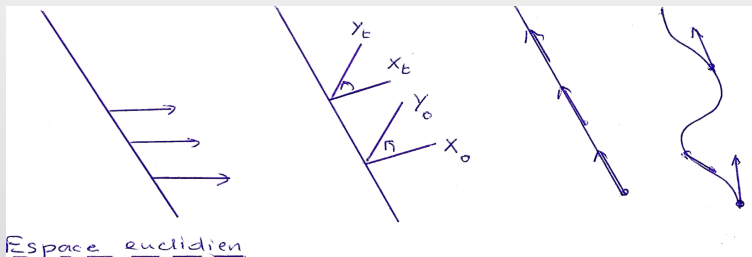
D est la dérivation covariante.

On a l'expression locale de la dérivée covariante :

$$\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = \left(\frac{dY^k(c(t))}{dt} + \Gamma_{ij}^k(c(t)) X^i(c(t)) Y^j(c(t)) \right) \partial_k$$

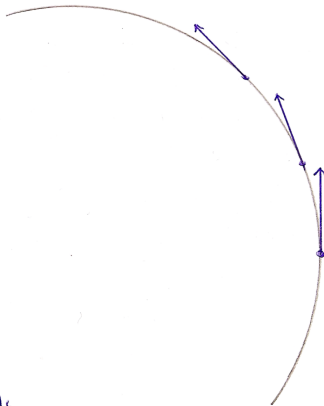
A l'aide de la formule précédente, on voit immédiatement qu'un vecteur transporté parallèlement dans l'espace euclidien est translaté.

Transport par translation



Espace euclidien

Transport parallèle



Transport parallèle
sur la sphère

Equation des géodésiques

- On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales :

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = \frac{d^2 x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma_{i,j}^k(c(t)) \frac{dx^i(c(t))}{dt} \frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).

Equation des géodésiques

- On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales :

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = \frac{d^2 x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma_{i,j}^k(c(t)) \frac{dx^i(c(t))}{dt} \frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).

- Les géodésiques de l'espace euclidien sont les droites.

Equation des géodésiques

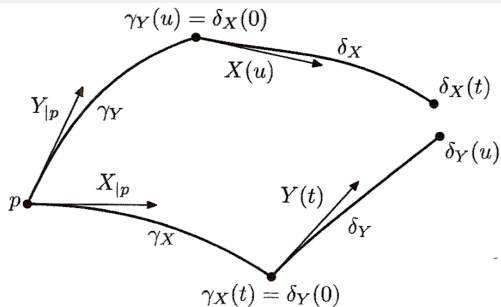
- On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales :

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = \frac{d^2 x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma_{i,j}^k(c(t)) \frac{dx^i(c(t))}{dt} \frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).

- Les géodésiques de l'espace euclidien sont les droites.
- Les géodésiques de la sphère sont les grands cercles. Les méridiens ou les parallèles sont des exemples de géodésiques sur terre.

Defaut de transport parallèle



Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :

Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $$R(X, Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$$
$$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p) \Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p) \Gamma^s_{i,l}(p) \right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$$

Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X, Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
$$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p) \Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p) \Gamma^s_{i,l}(p) \right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$

Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X, Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
$$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p) \Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p) \Gamma^s_{i,l}(p) \right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$
- Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :

Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X, Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
$$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p) \Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p) \Gamma^s_{i,l}(p) \right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$
- Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :
- Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant les indices k et l :
$$R_{i,j} = R^l{}_{ijl}$$

Tenseur de courbure De Riemann

- La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :
- $R(X, Y)_p Z_p = R^k{}_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) =$
$$\left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p) \Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p) \Gamma^s_{i,l}(p) \right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$$
- L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :
$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$
- Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :
- Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant les indices k et l :
$$R_{i,j} = R^l{}_{ijl}$$
- En contractant encore on obtient la courbure scalaire :
$$S = g^{ij} R_{ij}$$

Relativité Générale

Retour de la physique

Einstein est au courant des derniers travaux de Riemann et Levi-Civita au début du vingtième siècle Il peut acoucher de sa théorie de la Relativité Générale.

Relativité Générale

La relativité générale (gravitodynamique) joue le même rôle que l'électrodynamique dans la généralisation de l'électrostatique.

Une généralisation de la théorie de Newton

Un succès de la relativité générale provient du fait qu'elle restitue en champ faible la loi de Newton : On retrouve l'équation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$.

L'équation d'Einstein

- La matière dans l'univers est gouvernée par le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. Un des principes de physique requis est sa conservation : l'énergie et la matière sont conservées dans l'univers (par définition "le tout"). Dans la vision dynamique actuelle, cela se traduit par la nullité de la dérivée covariante du tenseur Energie impulsion :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

L'équation d'Einstein

- La matière dans l'univers est gouvernée par le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. Un des principes de physique requis est sa conservation : l'énergie et la matière sont conservées dans l'univers (par définition "le tout"). Dans la vision dynamique actuelle, cela se traduit par la nullité de la dérivée covariante du tenseur Energie impulsion :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

- Einstein a cherché longtemps une expression dérivée du tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ ayant la même propriété : la solution vient de la deuxième identité de Bianchi qui est donnée par :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

L'équation d'Einstein

- La matière dans l'univers est gouvernée par le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. Un des principes de physique requis est sa conservation : l'énergie et la matière sont conservées dans l'univers (par définition "le tout"). Dans la vision dynamique actuelle, cela se traduit par la nullité de la dérivée covariante du tenseur Energie impulsion :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

- Einstein a cherché longtemps une expression dérivée du tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ ayant la même propriété : la solution vient de la deuxième identité de Bianchi qui est donnée par :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

- On contracte deux fois par la métrique :

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0$$

$$\text{soit : } \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0$$

L'équation d'Einstein

- La matière dans l'univers est gouvernée par le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. Un des principes de physique requis est sa conservation : l'énergie et la matière sont conservées dans l'univers (par définition "le tout"). Dans la vision dynamique actuelle, cela se traduit par la nullité de la dérivée covariante du tenseur Energie impulsion :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

- Einstein a cherché longtemps une expression dérivée du tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ ayant la même propriété : la solution vient de la deuxième identité de Bianchi qui est donnée par :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

- On contracte deux fois par la métrique :

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0$$

$$\text{soit : } \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0$$

- Donc : $\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla^\mu g_{\mu\rho} R$

$$\text{On pose : } G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \text{ Alors, } \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

L'équation d'Einstein

- La matière dans l'univers est gouvernée par le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. Un des principes de physique requis est sa conservation : l'énergie et la matière sont conservées dans l'univers (par définition "le tout"). Dans la vision dynamique actuelle, cela se traduit par la nullité de la dérivée covariante du tenseur Energie impulsion :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

- Einstein a cherché longtemps une expression dérivée du tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ ayant la même propriété : la solution vient de la deuxième identité de Bianchi qui est donnée par :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

- On contracte deux fois par la métrique :

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0$$

$$\text{soit : } \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0$$

- Donc : $\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla^\mu g_{\mu\rho} R$

$$\text{On pose : } G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \text{ Alors, } \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

- Einstein en déduit la proportionnalité : $G_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu}$

Des théories dynamiques : Une théorie aboutie

Electromagnetisme

$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

electroSTATIQUE

$$\phi \rightarrow A^\mu$$

$$\rho \rightarrow J_\mu$$

$\Rightarrow$

$$\delta_\nu(\delta^\mu A^\nu - \delta^\nu A^\mu) = \mu_0 J_\mu$$

electroDYNAMIQUE

Des théories dynamiques

Un chaînon manquant

Electromagnetisme

$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

electroSTATIQUE

$$\phi \rightarrow A^\mu$$

$$\rho \rightarrow J_\mu$$

$\Rightarrow$

$$\delta_\nu(\delta^\mu A^\nu - \delta^\nu A^\mu) = \mu_0 J_\mu$$

electroDYNAMIQUE

Gravitation

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho$$

gravitoSTATIQUE

$$\psi \rightarrow ?$$

$$\rho \rightarrow ?$$

$\Rightarrow$

?

gravitoDYNAMIQUE

Des théories dynamiques

La reponse d'Einstein

Electromagnetisme

$$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

electroSTATIQUE

$$\phi \rightarrow A^\mu$$

$$\rho \rightarrow J_\mu$$

$\Rightarrow$

$$\delta_\nu(\delta^\mu A^\nu - \delta^\nu A^\mu) = \mu_0 J_\mu$$

electroDYNAMIQUE

Gravitation

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho$$

gravitoSTATIQUE

$$\psi \rightarrow g^{\mu\nu}$$

$$\rho \rightarrow T_{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}$$

gravitoDYNAMIQUE

Mécanique des fluides relativiste

- La matière-énergie est vue comme un fluide. On rappelle que pour comprendre l'effet de la gravitation dans le cadre Newtonien, on doit résoudre l'Equation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$ ainsi deux équations aux dérivées partielles.

Mécanique des fluides relativiste

- La matière-énergie est vue comme un fluide. On rappelle que pour comprendre l'effet de la gravitation dans le cadre Newtonien, on doit résoudre l'Equation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$ ainsi deux équations aux dérivées partielles.
- Equation de continuité : L'équation de continuité dit que la quantité de matière $Q(t2)$ contenue dans un élément volume au temps $t2$ est égale quantité de matière $Q(t1)$ à l'instant $t1$ augmentée de ce qui est entré de $t1$ à $t2$ et diminuée de ce qui est sorti pendant le même temps. Cette équation de continuité s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$

Mécanique des fluides relativiste

- La matière-énergie est vue comme un fluide. On rappelle que pour comprendre l'effet de la gravitation dans le cadre Newtonien, on doit résoudre l'Equation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$ ainsi deux équations aux dérivées partielles.
- Equation de continuité : L'équation de continuité dit que la quantité de matière $Q(t_2)$ contenue dans un élément volume au temps t_2 est égale quantité de matière $Q(t_1)$ à l'instant t_1 augmentée de ce qui est entré de t_1 à t_2 et diminuée de ce qui est sorti pendant le même temps. Cette équation de continuité s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$
- Equation d'Euler : C'est pour la mécanique des fluides, l'équation fondamentale de la dynamique. Pour une particule dans un champs de pesanteur on avait : $\frac{dv}{dt} = -\nabla U$, un fluide est de plus soumis à des forces de pressions et n'est pas ponctuellement localisé, l'équation devient : $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} = -\nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p$

Mécanique des fluides relativiste

- La matière-énergie est vue comme un fluide. On rappelle que pour comprendre l'effet de la gravitation dans le cadre Newtonien, on doit résoudre l'Equation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$ ainsi deux équations aux dérivées partielles.
- Equation de continuité : L'équation de continuité dit que la quantité de matière $Q(t_2)$ contenue dans un élément volume au temps t_2 est égale quantité de matière $Q(t_1)$ à l'instant t_1 augmentée de ce qui est entré de t_1 à t_2 et diminuée de ce qui est sorti pendant le même temps. Cette équation de continuité s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$
- Equation d'Euler : C'est pour la mécanique des fluides, l'équation fondamentale de la dynamique. Pour une particule dans un champs de pesanteur on avait : $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U$, un fluide est de plus soumis à des forces de pressions et n'est pas ponctuellement localisé, l'équation devient : $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p$
- Dans le cadre de la relativité générale il suffit de résoudre l'équation d'Einstein : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}$

Solution de l'équation d'Einstein : métrique de Schwarzschild

- On recherche la solution à symétrie centrale de la métrique au voisinage d'une boule fluide à l'extérieur puis à l'intérieur.

Solution de l'équation d'Einstein : métrique de Schwarzschild

- On recherche la solution à symétrie centrale de la métrique au voisinage d'une boule fluide à l'extérieur puis à l'intérieur.
- On trouve à l'extérieur :
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Solution de l'équation d'Einstein : métrique de Schwarzschild

- On recherche la solution à symétrie centrale de la métrique au voisinage d'une boule fluide à l'extérieur puis à l'intérieur.

- On trouve à l'extérieur :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

- On trouve à l'intérieur :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

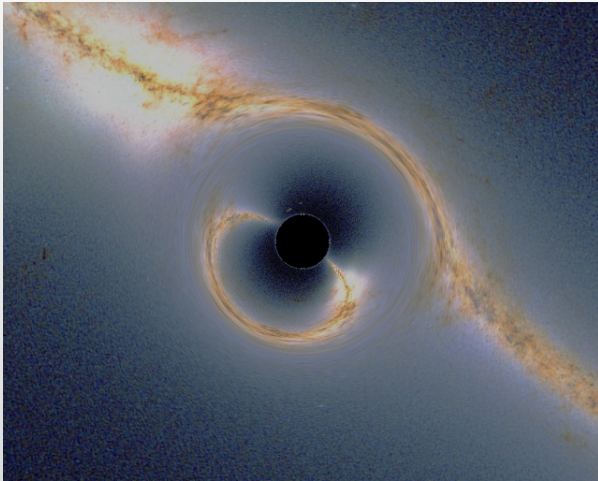
Solution de l'équation d'Einstein : métrique de Schwarzschild

- On recherche la solution à symétrie centrale de la métrique au voisinage d'une boule fluide à l'extérieur puis à l'intérieur.
- On trouve à l'extérieur :
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$
- On trouve à l'intérieur :
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$
- Ici $m(r)$ tend plus vite vers 0 que r .

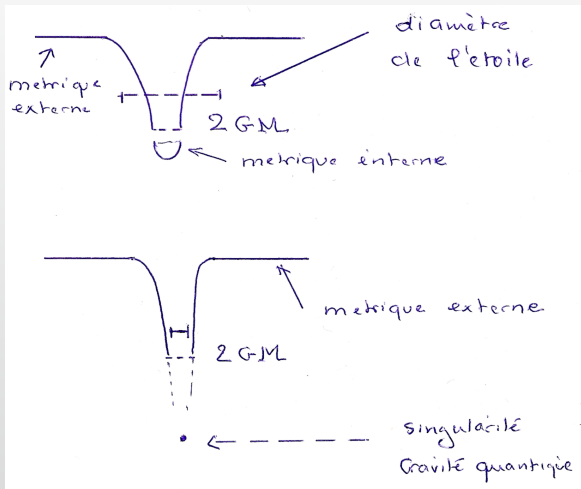
Solution de l'équation d'Einstein : métrique de Schwarzschild

- On recherche la solution à symétrie centrale de la métrique au voisinage d'une boule fluide à l'extérieur puis à l'intérieur.
- On trouve à l'extérieur :
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$
- On trouve à l'intérieur :
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$
- Ici $m(r)$ tend plus vite vers 0 que r .
- pour r infini, on retrouve la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques.

Au voisinage d'un trou noir



La métrique de Schwarzschild



Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

- Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.

Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

- Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.
- La résolution de l'équation d'Einstein donne :
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

- Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.
- La résolution de l'équation d'Einstein donne :
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$
- K est la courbure

Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

- Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.
- La résolution de l'équation d'Einstein donne :
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$
- K est la courbure
- $K > 0$: univers sphérique

Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

- Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.
- La résolution de l'équation d'Einstein donne :
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$
- K est la courbure
- $K > 0$: univers sphérique
- $K = 0$: espace euclidien

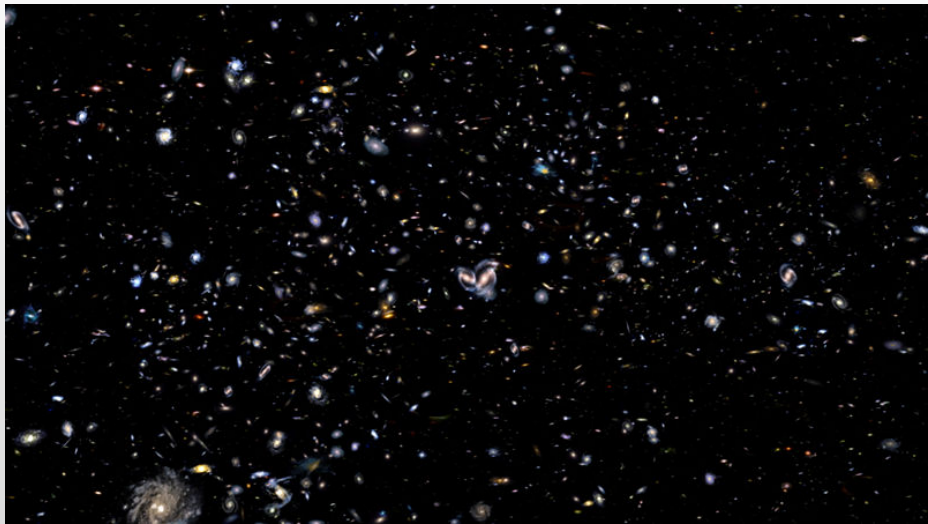
Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

- Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.
- La résolution de l'équation d'Einstein donne :
$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$
- K est la courbure
- $K > 0$: univers sphérique
- $K = 0$: espace euclidien
- $K < 0$: univers hyperbolique

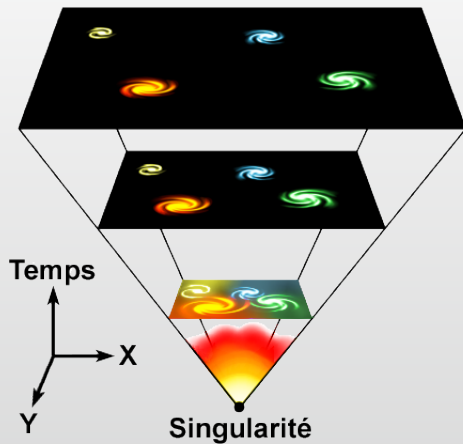
L'univers homogène



L'univers homogène (encore)



Expansion de l'univers : cas euclidien



Les équations de Friedmann, un système dynamique

- Contenu "géométrique" $G_{\mu,\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$
avec les symétries, $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{0i} = 0$, $R_{ij} = -(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2})g_{ij}$,
 $R = -6(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2})$. Ici H , paramètre de Hubble représente le taux d'expansion de l'univers.

Les équations de Friedmann, un système dynamique

- Contenu "géométrique" $G_{\mu,\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$
avec les symétries, $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{0i} = 0$, $R_{ij} = -(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2})g_{ij}$,
 $R = -6(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2})$. Ici H , paramètre de Hubble représente le taux d'expansion de l'univers.
- Contenu "matériel" $T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p)u_i u_j + pg_{ij}$ d'où $T_{00} = \rho(t)$,
 $T_{0j} = 0$, $T_{ij} = pg_{ij}(t, r)$

Les équations de Friedmann, un système dynamique

- Contenu "géométrique" $G_{\mu,\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$
avec les symétries, $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{0i} = 0$, $R_{ij} = -(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2})g_{ij}$,
 $R = -6(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2})$. Ici H , paramètre de Hubble représente le taux d'expansion de l'univers.
- Contenu "matériel" $T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p)u_i u_j + pg_{ij}$ d'où $T_{00} = \rho(t)$,
 $T_{0j} = 0$, $T_{ij} = pg_{ij}(t, r)$
- Equations de Friedmann $H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$, $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$
conservation de l'énergie impulsion entraîne : $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$.

Les équations de Friedmann, un système dynamique

- Contenu "géométrique" $G_{\mu,\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$
avec les symétries, $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{0i} = 0$, $R_{ij} = -(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2})g_{ij}$,
 $R = -6(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2})$. Ici H , paramètre de Hubble représente le taux d'expansion de l'univers.
- Contenu "matériel" $T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p)u_i u_j + pg_{ij}$ d'où $T_{00} = \rho(t)$,
 $T_{0j} = 0$, $T_{ij} = pg_{ij}(t, r)$
- Equations de Friedmann $H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$, $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$
conservation de l'énergie impulsion entraîne : $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$.
- Deux équations indépendantes, il manque une équation "d'état" $p = w\rho$,
 w constante.

Les équations de Friedmann, un système dynamique

- Contenu "géométrique" $G_{\mu,\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$
avec les symétries, $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{0i} = 0$, $R_{ij} = -(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2})g_{ij}$,
 $R = -6(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2})$. Ici H , paramètre de Hubble représente le taux d'expansion de l'univers.
- Contenu "matériel" $T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p)u_i u_j + pg_{ij}$ d'où $T_{00} = \rho(t)$,
 $T_{0j} = 0$, $T_{ij} = pg_{ij}(t, r)$
- Equations de Friedmann $H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$, $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$
conservation de l'énergie impulsion entraîne : $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$.
- Deux équations indépendantes, il manque une équation "d'état" $p = w\rho$,
 w constante.
- Alors immédiatement $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ permet de cerner le contenu (global)
de l'univers à l'instant t :
 $w = 0$: matière froide, $w = 1/3$: radiation, $w = -1$ "énergie du vide.

Formation des grandes structures, l'univers hétérogène

- L'univers n'est évidemment homogène qu'aux grandes échelles ou dans un milieu très chaud. Un sujet de recherche actuel en cosmologie est la formation des grandes structures telles qu'elles se dessinent à partir des cartes obtenues par Cobe, W-map .

Formation des grandes structures, l'univers hétérogène

- L'univers n'est évidemment homogène qu'aux grandes échelles ou dans un milieu très chaud. Un sujet de recherche actuel en cosmologie est la formation des grandes structures telles qu'elles se dessinent à partir des cartes obtenues par Cobe, W-map .
- l'idée est de perturber localement la gravité et voir ce qui se passe

Formation des grandes structures, l'univers hétérogène

- L'univers n'est évidemment homogène qu'aux grandes échelles ou dans un milieu très chaud. Un sujet de recherche actuel en cosmologie est la formation des grandes structures telles qu'elles se dessinent à partir des cartes obtenues par Cobe, W-map .
- l'idée est de perturber localement la gravité et voir ce qui se passe
- En Newtonien on déforme un peu la densité (loi de Poisson), les paramètres de pression et de vitesse puis on linéarise les équations de Navier-stokes, en tenant compte de l'expansion de l'univers on obtient :

$$\partial_t^2 \delta\rho + 2H\delta\rho - \frac{c_0^2}{a^2} \Delta\delta\rho = 4\pi G\bar{\rho}\delta\rho$$

Formation des grandes structures, l'univers hétérogène

- L'univers n'est évidemment homogène qu'aux grandes échelles ou dans un milieu très chaud. Un sujet de recherche actuel en cosmologie est la formation des grandes structures telles qu'elles se dessinent à partir des cartes obtenues par Cobe, W-map .
- l'idée est de perturber localement la gravité et voir ce qui se passe
- En Newtonien on déforme un peu la densité (loi de Poisson), les paramètres de pression et de vitesse puis on linéarise les équations de Navier-stokes, en tenant compte de l'expansion de l'univers on obtient :
$$\partial_t^2 \delta \rho + 2H \delta \rho - \frac{c_0^2}{a^2} \Delta \delta \rho = 4\pi G \bar{\rho} \delta \rho$$
- Cette équation dit que l'univers est dominé par la gravité (formation de structures) ou la pression (ondes) mais que l'expansion (facteur amortissant) permet de passer d'un mode à l'autre.

Formation des grandes structures, l'univers hétérogène

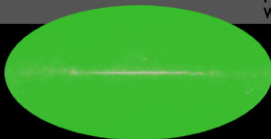
- L'univers n'est évidemment homogène qu'aux grandes échelles ou dans un milieu très chaud. Un sujet de recherche actuel en cosmologie est la formation des grandes structures telles qu'elles se dessinent à partir des cartes obtenues par Cobe, W-map .
- l'idée est de perturber localement la gravité et voir ce qui se passe
- En Newtonien on déforme un peu la densité (loi de Poisson), les paramètres de pression et de vitesse puis on linéarise les équations de Navier-stokes, en tenant compte de l'expansion de l'univers on obtient :
$$\partial_t^2 \delta \rho + 2H \delta \rho - \frac{c_0^2}{a^2} \Delta \delta \rho = 4\pi G \bar{\rho} \delta \rho$$
- Cette équation dit que l'univers est dominé par la gravité (formation de structures) ou la pression (ondes) mais que l'expansion (facteur amortissant) permet de passer d'un mode à l'autre.
- Pour les grosses perturbations, le problème est plus complexe et doit se résoudre en R.G en perturbant la métrique.

Formation des grandes structures

1965



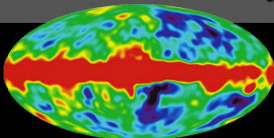
Penzias and
Wilson



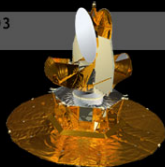
1992



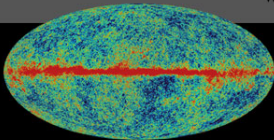
COBE



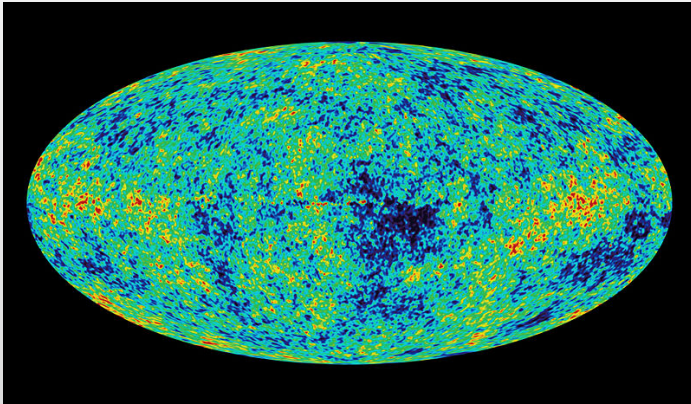
2003



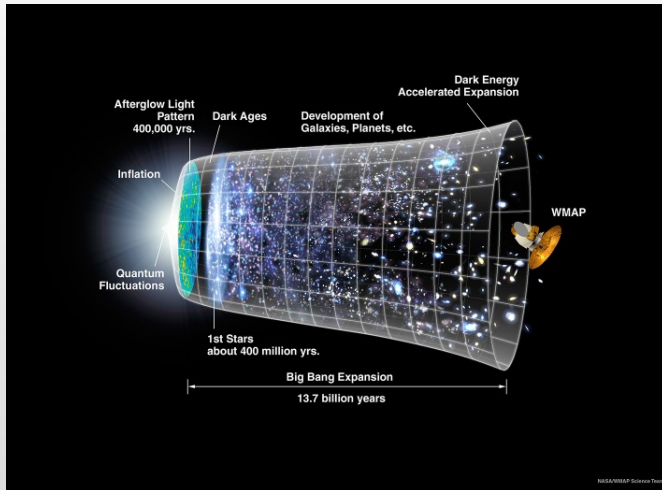
WMAP



Cartographie de WMAP



l'Hypothèse de l'inflation cosmologique



Bâtir une géométrie de l'infiniment petit

- La présence de singularités : trous noirs, singularité primordiale (Big bang) indique que la physique et la géométrie doivent être comprises en dessous de la distance de Planck : Il faut développer une géométrie compatible avec la mécanique quantique. Aucune approche actuellement proposée n'est entièrement satisfaisante.

Bâtir une géométrie de l'infiniment petit

- La présence de singularités : trous noirs, singularité primordiale (Big bang) indique que la physique et la géométrie doivent être comprises en dessous de la distance de Planck : Il faut développer une géométrie compatible avec la mécanique quantique. Aucune approche actuellement proposée n'est entièrement satisfaisante.
- Nous développerons essentiellement la théorie des corde. Mais d'autres théories sont dignes d'intérêt comme la géométrie non commutative (A.Connes), la gravité à boucle (C. Rovelli).

Bâtir une géométrie de l'infiniment petit

- La présence de singularités : trous noirs, singularité primordiale (Big bang) indique que la physique et la géométrie doivent être comprises en dessous de la distance de Planck : Il faut développer une géométrie compatible avec la mécanique quantique. Aucune approche actuellement proposée n'est entièrement satisfaisante.
- Nous développerons essentiellement la théorie des cordes. Mais d'autres théories sont dignes d'intérêt comme la géométrie non commutative (A.Connes), la gravité à boucle (C. Rovelli).
- La théorie des cordes est assez spéculative, pourtant les développements récents des années 1990 à 2009 de la symétrie miroir on vu interagir géométrie complexe (variétés de Calabi-Yau surfaces de Riemann, géométrie énumérative), algébrique, symplectique (champs algébriques théorie des déformations), topologie algébrique (branes et foncteurs dérivés) et modélisation physique.

Bâtir une géométrie de l'infiniment petit

- La présence de singularités : trous noirs, singularité primordiale (Big bang) indique que la physique et la géométrie doivent être comprises en dessous de la distance de Planck : Il faut développer une géométrie compatible avec la mécanique quantique. Aucune approche actuellement proposée n'est entièrement satisfaisante.
- Nous développerons essentiellement la théorie des cordes. Mais d'autres théories sont dignes d'intérêt comme la géométrie non commutative (A.Connes), la gravité à boucle (C. Rovelli).
- La théorie des cordes est assez spéculative, pourtant les développements récents des années 1990 à 2009 de la symétrie miroir on vu interagir géométrie complexe (variétés de Calabi-Yau surfaces de Riemann, géométrie énumérative), algébrique, symplectique (champs algébriques théorie des déformations), topologie algébrique (branes et foncteurs dérivés) et modélisation physique.
- Une théorie encore instables : il existe pas moins de 5 théories des cordes acceptables, laquelle choisir ?, quelle théorie M serait la théorie du tout ?

La physique des champs et de cordes

- En physique quantique, les mouvements des particules ne sont pas connus de façon certaine.

La physique des champs et de cordes

- En physique quantique, les mouvements des particules ne sont pas connus de façon certaine.
- Alors qu'en physique macroscopique, une particule non dérangée suit sa ligne de vie qui est une géodésique obtenue en minimisant une action, l'intégrale d'un Lagrangien $L(x, \dot{x})$, (pour la particule libre $S(x, \dot{x}) = \int_0^t \dot{x}^2 d\tau$), en dessous de la distance de Planck, on ne peut plus envisager des trajectoires déterministes.

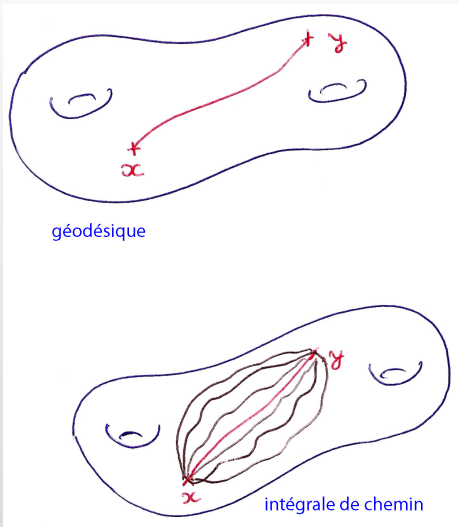
La physique des champs et de cordes

- En physique quantique, les mouvements des particules ne sont pas connus de façon certaine.
- Alors qu'en physique macroscopique, une particule non dérangée suit sa ligne de vie qui est une géodésique obtenue en minimisant une action, l'intégrale d'un Lagrangien $L(x, \dot{x})$, (pour la particule libre $S(x, \dot{x}) = \int_0^t \dot{x}^2 d\tau$), en dessous de la distance de Planck, on ne peut plus envisager des trajectoires déterministes.
- Il faut remplacer la géodésique par l'amplitude de probabilité d'aller de x à y en un temps t : C'est l'intégrale de chemin.
$$\Phi_t(x, y) = \int_{[0, t] \rightarrow M} \mathcal{D}x \exp(-S(x, \dot{x}))$$

La physique des champs et de cordes

- En physique quantique, les mouvements des particules ne sont pas connus de façon certaine.
- Alors qu'en physique macroscopique, une particule non dérangée suit sa ligne de vie qui est une géodésique obtenue en minimisant une action, l'intégrale d'un Lagrangien $L(x, \dot{x})$, (pour la particule libre $S(x, \dot{x}) = \int_0^t \dot{x}^2 d\tau$), en dessous de la distance de Planck, on ne peut plus envisager des trajectoires déterministes.
- Il faut remplacer la géodésique par l'amplitude de probabilité d'aller de x à y en un temps t : C'est l'intégrale de chemin.
$$\Phi_t(x, y) = \int_{[0, t] \rightarrow M} \mathcal{D}x \exp(-S(x, \dot{x}))$$
- Dans cette dernière intégrale on a des inconnues. M n'est pas forcément une variété Riemannienne et l'espace de départ un simple intervalle. Ils doivent être adaptés dans le cadre de la théorie des cordes.

Chemin classique, chemin quantique



La formulation Hamiltonienne

- Pour la quantification il est commode d'introduire la formulation Hamiltonienne : en posant $x_i = q_i, \dot{x}_i = \dot{q}_i$ les coordonnées généralisées en introduisant les moments (quantités de mouvement) $p_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

La formulation Hamiltonienne

- Pour la quantification il est commode d'introduire la formulation Hamiltonienne : en posant $x_i = q_i, \dot{x}_i = \dot{q}_i$ les coordonnées généralisées en introduisant les moments (quantités de mouvement) $p_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
- Dans les bonnes situations, la transformée de Legendre du Lagrangien donne l'hamiltonien
$$H(q_i, p_i) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i).$$

La formulation Hamiltonienne

- Pour la quantification il est commode d'introduire la formulation Hamiltonienne : en posant $x_i = q_i, \dot{x}_i = \dot{q}_i$ les coordonnées généralisées en introduisant les moments (quantités de mouvement) $p_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
- Dans les bonnes situations, la transformée de Legendre du Lagrangien donne l'hamiltonien
$$H(q_i, p_i) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i).$$
- Dans les cas intéressants, H est une quantité indépendante du temps, l'Energie du système et obéit au système différentiel autonome :
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

La formulation Hamiltonienne

- Pour la quantification il est commode d'introduire la formulation Hamiltonienne : en posant $x_i = q_i$, $\dot{x}_i = \dot{q}_i$ les coordonnées généralisées en introduisant les moments (quantités de mouvement) $p_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
- Dans les bonnes situations, la transformée de Legendre du Lagrangien donne l'hamiltonien
$$H(q_i, p_i) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i).$$
- Dans les cas intéressant, H est une quantité indépendante du temps, l'Energie du système et obéit au système différentiel autonome :
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
- Les coordonnées moments (q_i, p_i) définissent un espace des phases à $2n$ dimensions qui possède en outre une structure de variété symplectique avec la deux forme $\omega = dq_i \wedge dp_i$

Dictionnaire classique - quantique

- En mécanique quantique on remplace la position de la particule au point $x \in X$ par la probabilité d'observer la particule au point x : $P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$ où $\psi \in L^2(X) = \mathcal{H}$ est la fonction d'ondes associée à la particule ponctuelle "pt". $\mathcal{H}_{pt}$ est l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes des particules.

Dictionnaire classique - quantique

- En mécanique quantique on remplace la position de la particule au point $x \in X$ par la probabilité d'observer la particule au point x : $P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$ où $\psi \in L^2(X) = \mathcal{H}$ est la fonction d'ondes associée à la particule ponctuelle "pt". $\mathcal{H}_{pt}$ est l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes des particules.
- La géodésique est remplacée dans le temps par l'opérateur unitaire d'évolution :
 $\Phi_{\mathbb{C}}(t) : \mathcal{H}_{pt} \rightarrow \mathcal{H}_{pt}, \psi(x) \mapsto e^{itH}\psi(y)$
La notation exponentielle est justifiée par : $\Phi_{\mathbb{C}}(t_1 + t_2) = \Phi_{\mathbb{C}}(t_2) \circ \Phi_{\mathbb{C}}(t_1)$

Dictionnaire classique - quantique

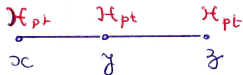
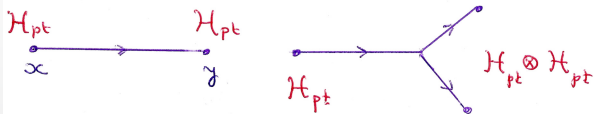
- En mécanique quantique on remplace la position de la particule au point $x \in X$ par la probabilité d'observer la particule au point x : $P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$ où $\psi \in L^2(X) = \mathcal{H}$ est la fonction d'ondes associée à la particule ponctuelle "pt". $\mathcal{H}_{pt}$ est l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes des particules.
- La géodésique est remplacée dans le temps par l'opérateur unitaire d'évolution :
$$\Phi_{\mathbb{C}}(t) : \mathcal{H}_{pt} \rightarrow \mathcal{H}_{pt}, \psi(x) \mapsto e^{itH}\psi(y)$$

La notation exponentielle est justifiée par : $\Phi_{\mathbb{C}}(t_1 + t_2) = \Phi_{\mathbb{C}}(t_2) \circ \Phi_{\mathbb{C}}(t_1)$
- Ce qui peut aussi se voir du point de vue lagrangien avec l'intégrale de chemin :
$$\Phi_t(x, y) = \int_{[0,t] \rightarrow M} \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp(-L(x, \dot{x})) = e^{-tH} \text{ avec } q(0) = x; q(t) = y$$

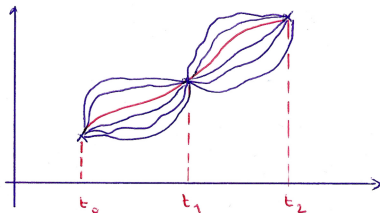
Dictionnaire classique - quantique

- En mécanique quantique on remplace la position de la particule au point $x \in X$ par la probabilité d'observer la particule au point x : $P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$ où $\psi \in L^2(X) = \mathcal{H}$ est la fonction d'ondes associée à la particule ponctuelle "pt". $\mathcal{H}_{pt}$ est l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes des particules.
- La géodésique est remplacée dans le temps par l'opérateur unitaire d'évolution :
 $\Phi_{\mathbb{C}}(t) : \mathcal{H}_{pt} \rightarrow \mathcal{H}_{pt}, \psi(x) \mapsto e^{itH}\psi(y)$
La notation exponentielle est justifiée par : $\Phi_{\mathbb{C}}(t_1 + t_2) = \Phi_{\mathbb{C}}(t_2) \circ \Phi_{\mathbb{C}}(t_1)$
- Ce qui peut aussi se voir du point de vue lagrangien avec l'intégrale de chemin :
 $\Phi_t(x, y) = \int_{[0,t] \rightarrow M} \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp(-L(x, \dot{x})) = e^{-tH}$ avec $q(0) = x; q(t) = y$
- Et la règle de composition : $\Phi_{t_1+t_2}(x, z) = \int_X dy \Phi_{t_1}(x, y) \Phi_{t_2}(y, z)$

Propagation dans le monde quantique



vision Hamiltonienne: propagation



vision Lagrangienne :
Intégrale de chemin

Théorie des cordes bosoniques

- Aux petites échelles la particule devrait être vue comme une corde ouverte ou fermée. L'action classique est l'action de Nambu-Goto qui se comprend bien mais se quantifie mal :

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2} \text{ avec}$$

$$\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X} X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

Théorie des cordes bosoniques

- Aux petites échelles la particule devrait être vue comme une corde ouverte ou fermée. L'action classique est l'action de Nambu-Goto qui se comprend bien mais se quantifie mal :

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_1} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X}X')^2} \text{ avec}$$

$$\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X}X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

- L'espace des paramètres définit ici une surface de Riemann Σ (worldsheet), T est la tension de la corde, l'action ici minimise l'aire balayée par la corde.

Théorie des cordes bosoniques

- Aux petites échelles la particule devrait être vue comme une corde ouverte ou fermée. L'action classique est l'action de Nambu-Goto qui se comprend bien mais se quantifie mal :

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_1} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X}X')^2} \text{ avec}$$
$$\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X}X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

- L'espace des paramètres définit ici une surface de Riemann Σ (worldsheet), T est la tension de la corde, l'action ici minimise l'aire balayée par la corde.
- En considérant une métrique intrinsèque $g_{\alpha\beta}$ sur la surface de Riemann Σ , on peut définir une action quantifiable et équivalente, l'action de Polyakov : $S = -T/2 \int_{\Sigma} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu} d\sigma d\tau$

Théorie des cordes bosoniques

- Aux petites échelles la particule devrait être vue comme une corde ouverte ou fermée. L'action classique est l'action de Nambu-Goto qui se comprend bien mais se quantifie mal :

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X}X')^2} \text{ avec}$$
$$\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X}X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

- L'espace des paramètres définit ici une surface de Riemann Σ (worldsheet), T est la tension de la corde, l'action ici minimise l'aire balayée par la corde.
- En considérant une métrique intrinsèque $g_{\alpha\beta}$ sur la surface de Riemann Σ , on peut définir une action quantifiable et équivalente, l'action de Polyakov : $S = -T/2 \int_{\Sigma} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu} d\sigma d\tau$
- On généralise l'intégrale de chemin : $\Phi_{\Sigma} = \int_{X:\Sigma \rightarrow M} \mathcal{D}x \exp(S)$

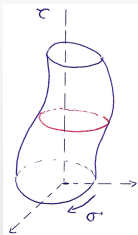
Théorie des cordes bosoniques

- Aux petites échelles la particule devrait être vue comme une corde ouverte ou fermée. L'action classique est l'action de Nambu-Goto qui se comprend bien mais se quantifie mal :

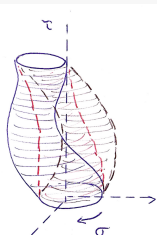
$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2} \text{ avec}$$
$$\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X} X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

- L'espace des paramètres définit ici une surface de Riemann Σ (worldsheet), T est la tension de la corde, l'action ici minimise l'aire balayée par la corde.
- En considérant une métrique intrinsèque $g_{\alpha\beta}$ sur la surface de Riemann Σ , on peut définir une action quantifiable et équivalente, l'action de Polyakov : $S = -T/2 \int_{\Sigma} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} \eta_{\mu\nu} d\sigma d\tau$
- On généralise l'intégrale de chemin : $\Phi_{\Sigma} = \int_{X:\Sigma \rightarrow M} \mathcal{D}x \exp(S)$
- Ici M est une variété (pseudoriemannienne) de dimension D suffisamment grande ($D = 26$ pour la théorie des cordes bosoniques).

Propagation des cordes

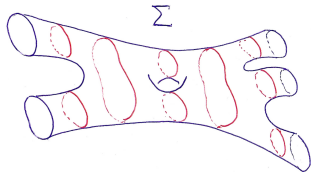


Propagation classique



Intégrale de tube: quantique

Surface de Riemann (worldsheet)



$$H_{s_1} \otimes H_{s_1} \longrightarrow H_{s_1} \otimes H_{s_1} \otimes H_{s_1}$$

Equation du mouvement de la corde relativiste classique

- La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde donne $(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})x^\mu = 0$

Equation du mouvement de la corde relativiste classique

- La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde donne $(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})x^\mu = 0$
- On reconnait l'équation des ondes dont la solution est $X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Pour les cordes fermées, on a :

Equation du mouvement de la corde relativiste classique

- La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde donne $(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})x^\mu = 0$
- On reconnait l'équation des ondes dont la solution est $X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Pour les cordes fermées, on a :

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}$$

Equation du mouvement de la corde relativiste classique

- La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde donne $(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})x^\mu = 0$
- On reconnait l'équation des ondes dont la solution est $X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Pour les cordes fermées, on a :
$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$
$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}$$
- Dans ces écritures, l_s est la longueur de la corde, α_k^μ , $\bar{\alpha}_k^\mu$, les modes de vibrations qui déterminent les masses des particules.

Equation du mouvement de la corde relativiste classique

- La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde donne $(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})x^\mu = 0$
- On reconnait l'équation des ondes dont la solution est $X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Pour les cordes fermées, on a :
$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$
$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}$$
- Dans ces écritures, l_s est la longueur de la corde, α_k^μ , $\bar{\alpha}_k^\mu$, les modes de vibrations qui déterminent les masses des particules.
- Le premier et le deuxième termes de ces développements de Fourier représentent la position et la quantité de mouvement du centre de masse.

Equation du mouvement de la corde relativiste classique

- La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde donne $(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2})x^\mu = 0$

- On reconnait l'équation des ondes dont la solution est $X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Pour les cordes fermées, on a :

- $$\begin{aligned} X_L^\mu(\tau + \sigma) &= \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)} \\ X_R^\mu(\tau - \sigma) &= \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)} \end{aligned}$$

- Dans ces écritures, l_s est la longueur de la corde, α_k^μ , $\bar{\alpha}_k^\mu$, les modes de vibrations qui déterminent les masses des particules.
- Le premier et le deuxième termes de ces développements de Fourier représentent la position et la quantité de mouvement du centre de masse.
- On peut définir des équations similaires pour les cordes ouvertes en imposant deux types de conditions aux extrémités de la corde de Neuman ou Dirichlet pour les coordonnées, ainsi on peut définir l'attache des cordes à des p-branes...

Quantification de la corde bosonique

- La formulation hamiltonnienne associée au principe de moindre action ,
comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson :
$$\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu} \text{ avec } p^\mu = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{X}^\mu}$$

Quantification de la corde bosonique

- La formulation hamiltonnienne associée au principe de moindre action ,
comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson :
 $\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$ avec $p^\mu = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{X}^\mu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Poisson pour les modes : $\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = -im\delta_{m+n, \sigma}\eta_{\mu\nu}$

Quantification de la corde bosonique

- La formulation hamiltonnienne associée au principe de moindre action , comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson :
$$\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu} \text{ avec } p^\mu = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{X}^\mu}$$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Poisson pour les modes : $\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = -im\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$
- La quantification des crochets de Poisson fournit les crochets de Lie :
$$[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$$

Quantification de la corde bosonique

- La formulation hamiltonnienne associée au principe de moindre action , comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson :
 $\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$ avec $p^\mu = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{X}^\mu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Poisson pour les modes : $\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = -im\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$
- La quantification des crochets de Poisson fournit les crochets de Lie :
 $[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Lie pour les modes : $[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$

Quantification de la corde bosonique

- La formulation hamiltonnienne associée au principe de moindre action , comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson :
 $\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$ avec $p^\mu = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \dot{x}^\mu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Poisson pour les modes : $\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = -im\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$
- La quantification des crochets de Poisson fournit les crochets de Lie :
 $[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Lie pour les modes : $[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$
- On peut alors définir l'espace de Hilbert des états d'une corde qui est l'espace de Fock qui gère les vibrations de la corde.

Quantification de la corde bosonique

- La formulation hamiltonnienne associée au principe de moindre action , comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson :
 $\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$ avec $p^\mu = -\frac{\partial S}{\partial \dot{x}^\mu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Poisson pour les modes : $\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = -im\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$
- La quantification des crochets de Poisson fournit les crochets de Lie :
 $[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$
- Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Lie pour les modes : $[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$
- On peut alors définir l'espace de Hilbert des états d'une corde qui est l'espace de Fock qui gère les vibrations de la corde.
- Il y a des contraintes sur la dimension de l'espace pour éviter les états de masses négatives : "tachyons". Il faut contraindre $D = 26$ dans la théorie des cordes bosoniques.

Modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes

- L'introduction des cordes bosoniques, montre que l'existence des cordes requière une dimension d'espace égale à 26 et notre univers macroscopique n'en a que 4, on s'en sort en compactifiant les dimensions supérieures à 4 : on a des dimensions enroulées

Modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes

- L'introduction des cordes bosoniques, montre que l'existence des cordes requière une dimension d'espace égale à 26 et notre univers macroscopique n'en a que 4, on s'en sort en compactifiant les dimensions supérieures à 4 : on a des dimensions enroulées
- Les théories de cordes sont des théories de champs conformes, la surface de riemann source peut être munie d'une structure complexe : la géométrie complexe fait son apparition.

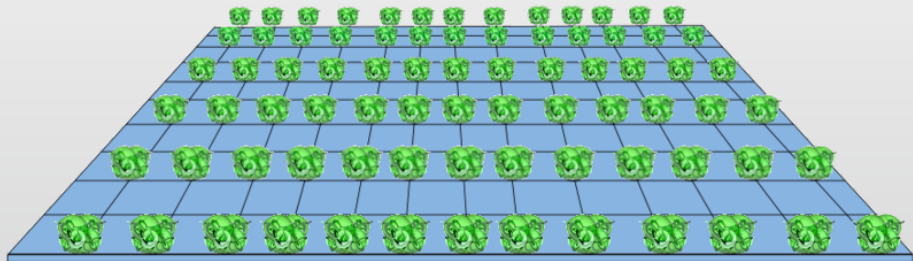
Modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes

- L'introduction des cordes bosoniques, montre que l'existence des cordes requière une dimension d'espace égale à 26 et notre univers macroscopique n'en a que 4, on s'en sort en compactifiant les dimensions supérieures à 4 : on a des dimensions enroulées
- Les théories de cordes sont des théories de champs conformes, la surface de riemann source peut être munie d'une structure complexe : la géométrie complexe fait son apparition.
- Des théories supersymétriques de la physique enrichissent la théorie classique : théorie des supercordes, par l'introduction de variables fermioniques ainsi on peut montrer que les dimensions supplémentaires se réduisent à 6 et son compactifiées en variétés kahleriennes particulières : l'espace temps est fibré en variétés de Calabi-Yau

Modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes

- L'introduction des cordes bosoniques, montre que l'existence des cordes requière une dimension d'espace égale à 26 et notre univers macroscopique n'en a que 4, on s'en sort en compactifiant les dimensions supérieures à 4 : on a des dimensions enroulées
- Les théories de cordes sont des théories de champs conformes, la surface de riemann source peut être munie d'une structure complexe : la géométrie complexe fait son apparition.
- Des théories supersymétriques de la physique enrichissent la théorie classique : théorie des supercordes, par l'introduction de variables fermioniques ainsi on peut montrer que les dimensions supplémentaires se réduisent à 6 et son compactifiées en variétés kahleriennes particulières : l'espace temps est fibré en variétés de Calabi-Yau
- Les progrès récents (années 90) ont conduit à définir d'étranges dualités T-dualité et la symétrie miroir qui en est une généralisation.

Les dimensions enroulées



Une variété de Calabi Yau



Théorie des cordes en cosmologie

- Une énigme résiste encore : c'est la faiblesse de l'interaction gravitationnelle par rapport aux autres interactions. Le graviton, particule véhiculant la gravitation, est représenté par une corde fermée. Les autres interactions (cordes ouvertes) seraient attachées à notre brane. En fait les gravitons seraient capables de quitter notre brane.

Théorie des cordes en cosmologie

- Une énigme résiste encore : c'est la faiblesse de l'interaction gravitationnelle par rapport aux autres interactions. Le graviton, particule véhiculant la gravitation, est représenté par une corde fermée. Les autres interactions (cordes ouvertes) seraient attachées à notre brane. En fait les gravitons seraient capables de quitter notre brane.
- En se balladant au travers des univers branaires, le graviton diluerait ainsi la force de gravitation dans les dimensions supplémentaires.

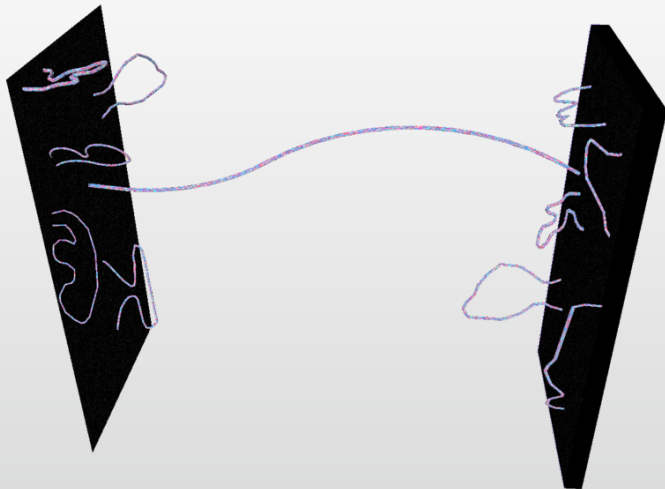
Théorie des cordes en cosmologie

- Une énigme résiste encore : c'est la faiblesse de l'interaction gravitationnelle par rapport aux autres interactions. Le graviton, particule véhiculant la gravitation, est représenté par une corde fermée. Les autres interactions (cordes ouvertes) seraient attachées à notre brane. En fait les gravitons seraient capables de quitter notre brane.
- En se balladant au travers des univers branaires, le graviton diluerait ainsi la force de gravitation dans les dimensions supplémentaires.
- Les différentes branes pourraient aussi entrer en collisions créant ainsi de nouveaux univers ; le Big Bang ne serait pas une singularité isolée.

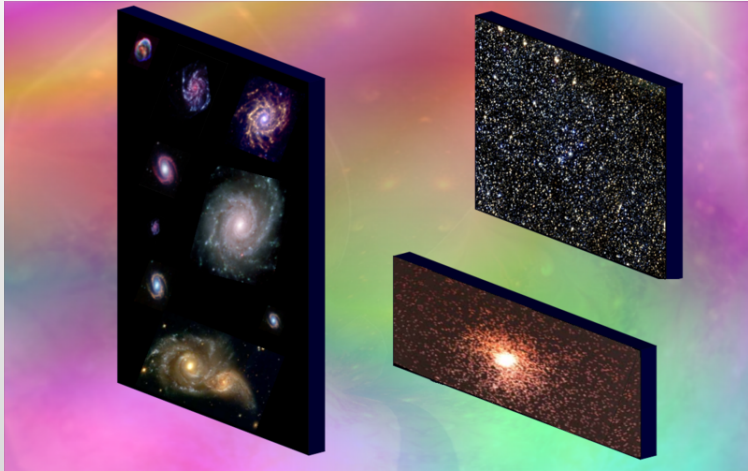
Théorie des cordes en cosmologie

- Une énigme résiste encore : c'est la faiblesse de l'interaction gravitationnelle par rapport aux autres interactions. Le graviton, particule véhiculant la gravitation, est représenté par une corde fermée. Les autres interactions (cordes ouvertes) seraient attachées à notre brane. En fait les gravitons seraient capables de quitter notre brane.
- En se balladant au travers des univers branaires, le graviton diluerait ainsi la force de gravitation dans les dimensions supplémentaires.
- Les différentes branes pourraient aussi entrer en collisions créant ainsi de nouveaux univers ; le Big Bang ne serait pas une singularité isolée.
- Enfin pour l'instant ces théories sont assez spéculatives et ne font pas l'adhésion de tous les spécialistes.

Les branes



Les univers branaires



Autres voies pour expliquer la gravité quantique

- Une géométrie, proche de la mécanique quantique est proposée par Alain Connes, c'est la géométrie non commutative. L'idée d'Alain Connes est d'associer à un espace géométrique X une algèbre $\mathcal{A}$ éventuellement non commutative. Par exemple, en raisonnant sur l'algèbre des fonctions $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X)$ il retrouve X mais il peut aussi la coupler à des structures non commutatives "algèbre de matrices" décrivant les symétries internes des particules.

Autres voies pour expliquer la gravité quantique

- Une géométrie, proche de la mécanique quantique est proposée par Alain Connes, c'est la géométrie non commutative. L'idée d'Alain Connes est d'associer à un espace géométrique X une algèbre $\mathcal{A}$ éventuellement non commutative. Par exemple, en raisonnant sur l'algèbre des fonctions $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X)$ il retrouve X mais il peut aussi la coupler à des structures non commutatives "algèbre de matrices" décrivant les symétries internes des particules.
- Carlo Rovelli a inventé la gravité quantique à boucles ; son idée est de quantifier directement l'espace temps de la relativité générale ; il montre qu'aux échelles de Planck, l'espace et le temps sont constitués d'entités discrètes.

Synergie avec les systèmes dynamiques

- Les équations de la relativité générale donnent lieu à l'étude de systèmes dynamiques intéressants, particulièrement dans l'étude de la formation des grandes structures. Les données du satellite Planck lancé récemment devraient permettre d'affiner les modélisations ; des simulations numériques pourraient être améliorées avec les logiciels de calculs formels comme matlab ou mathematica.

Synergie avec les systèmes dynamiques

- Les équations de la relativité générale donnent lieu à l'étude de systèmes dynamiques intéressants, particulièrement dans l'étude de la formation des grandes structures. Les données du satellite Planck lancé récemment devraient permettre d'affiner les modélisations ; des simulations numériques pourraient être améliorées avec les logiciels de calculs formels comme matlab ou mathematica.
- L'étude importante des théories renormalisables fait appel aux systèmes intégrables ; le flot de renormalisation et se décrit bien en tant que systèmes dynamiques.
- merci !

-  Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Taylors Francis, New York, 2003.
-  D.McDuff, D.Salamon, *Introduction to symplectic géometry* Oxford University Press, 1995.
-  D.McDuff, D.Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Univ. Lecture series 6, A.M.S., 1994.
-  M. Kontsevich, Y.Manin, *Gromov-Witten Class, Quantum Cohomology, and enumerative Geometry*, Mirror symetry II, A.M.S/IP Studies in advanced Math., Vol 1 A.M.S, 1997, pp. 607-653.
-  M.Audin *Cohomologie quantique* Séminaire Bourbaki, n° 807, 1995.
-  S.Donaldson, P. Kronheimer, *The geometry of four manifolds*, Oxford University Press, 1990.

K. Becker, MBecker, J. H. Schwarz *String theory and M-theory*
Cambridge, 2007.

B.Zwiebach, *A first course in sting theory*, Cambridge, 2004. Press, 1990.

K.Hori, S. Katz, A. Klem, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R.
Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, AMS, 2003. Press, 1990.