

Groupe de travail Systèmes Dynamiques

Le problème des cordes en cosmologie : une première explication

Ph Durand, CNAM Paris

28 mai 2009

1 Introduction

La mécanique quantique et la théorie des particules débouchent à la fin des années 70 sur le modèle standard qui recense les particules connues à ce jour et leurs interactions. Ce modèle n'est pas parfait et il est trop descriptif : Il cartographie essentiellement les résultats fournis par les accélérateurs de particules. La théorie des cordes serait une alternative pour décrire les objets du modèle standard : selon la fréquence de sa vibration, la corde redonne telle ou telle particule. On distingue cordes ouvertes et cordes fermées.

2 Quête d'unification et de généralisation

En physique : Electrostatique et magnétostatique donne l'électromagnétisme. La matière, l'énergie, l'espace et le temps, entités distinctes, sont unifiés premièrement en l'espace et le temps (relativité restreinte). L'espace temps couplé à la matière-énergie ($E = Mc^2$) fournit l'unification macroscopique, la relativité générale.

En Mathématiques : Au début est l'arithmétique et la géométrie (Thalès, Pythagore) puis vint l'algèbre (al-jabr en arabe) et l'analyse (Leibniz) enfin Poincaré définit la topologie, les unifications sont nombreuses : géométrie algébrique, géométrie arithmétique, géométrie différentielle, topologie algébrique...etc....

2.1 Electromagnétisme, Gravitation

Thalès de Milet (−600 Av-JC), découvre l'électrisation en frottant un morceau d'ambre sur une peau de chat, et en 1600 le mot électrique (ambre en grec) est inventé par William Gilbert. C'est Coulomb en 1785 qui dégage les lois de l'électrostatique. Les aimants sont connus depuis les Grecs, Franklin découvre l'effet des orages sur les boussoles (1752), mais c'est en 1820 que Oersted, Biot et Savart découvre le lien entre courant et boussole, l'électromagnétisme est né et il revient à Maxwell la construction d'une théorie synthétique : Les équations de Maxwell (1873).

En ce qui concerne la gravitation, les premières tentatives de modélisations reviennent à Aristote (−384 Av-JC). Plus un corps pèse, plus il tombe vite. Ce modèle est réfuté par Galilée qui comprend que cela est dû à la "résistance" de l'air", pour lui la vitesse est proportionnelle au temps de chute il en déduit la constante g avec deux décimales ! Newton base la mécanique sur la notion nouvelle d'accélération et ainsi découvre que deux corps s'attirent en raison inverse

du carré de leurs distances. Enfin la théorie de la relativité d'Einstein montre que toute propagation à une vitesse bornée et sa théorie débouche sur une vision géométrique de la gravitation (qui perd son statut de force).

3 Du calcul différentiel à la relativité générale

3.1 Le déterminisme

La physique suit dans un premier temps les mathématiques : le domaine du certain est roi. Newton qui invente le calcul différentiel, prédit la trajectoire des objets, presque partout les courbes, les surfaces sont lisses, même au niveau des particules on étudie des trajectoires lisses (particules dans un champ magnétique, modèle simpliste de l'atome d'hydrogène).

Le calcul différentiel et infinitésimal fut mise en place par Newton et Leibniz au même moment que la théorie de la gravitation. Comme son nom l'indique, il explore localement un espace de configurations. Mais l'intégration, les équations différentielles montrent la nécessité d'une compréhension globale de l'espace et donne naissance à la géométrie différentielle et plus tard à la topologie algébrique.

3.2 Le concept de forme différentielle

La formule de base du calcul différentiel est :
 $f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h)$ avec $L_{x_0}(h) = A.h (= df_{x_0}(h))$ fonction linéaire appelée différentielle au point x_0 et $A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0 . Cela permet d'extraire un nouvel objet : la forme différentielle de degré 1 définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n , de disposer d'un outils permettant de comprendre la topologie d'un ouvert, puis d'une variété qui peut être algébrisée et donner naissance au calcul tensoriel, aux formes différentielles de degré supérieur et ainsi donner naissance à l'analyse tensorielle sur une variété et à sa compréhension topologique.

3.3 Début de l'analyse "situs" et de la topologie algébrique

La considération des formes différentielles de degré 1 permet de comprendre la topologie d'un voisinage : dans \mathbb{R} tous les ouverts se ressemblent modulo la connexité, toute fonction continue est intégrable sur un intervalle fermé borné. Autrement dit, toute forme différentielle est exacte (ie différentielle d'une fonction). On peut étendre la dérivation aux formes différentielles, on a un complexe de chaîne ($d \circ d = 0$) :

$$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$$

Ce résultat n'est plus vrai dans \mathbb{R}^2 : Prenons une fonction numérique f à deux variables de classe \mathcal{C}^∞ sur U dont l'ensemble de définition est un ouvert de \mathbb{R}^2 , l'ensemble des fonctions en questions peut être vu comme l'ensemble des 0-formes différentielles de classes \mathcal{C}^∞ sur U noté $\mathcal{C}^\infty(U)$. On peut différentier f on obtient une 1-formes différentielles (Cela correspond en physique à prendre l'opérateur gradient). Le processus peut continuer dans \mathbb{R}^2 la dérivé d'une 1- forme est son rotationnel, on a alors une flèche de plus dans le schéma vu ci-dessus :

$$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} \Omega_2(U) \xrightarrow{d} 0$$

3.3.1 L'analyse vectorielle dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3

Dans le langage de l'ingénieur on retrouve :

Analyse vectorielle à deux variables-> Complexe de De Rham d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 :

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{Grad} \Omega_1(U) \xrightarrow{Rot} \Omega_2(U) \longrightarrow 0$$

$$\underline{Rot(Grad) = 0}$$

Analyse vectorielle à trois variables-> Complexe de De Rham d'un ouvert U de \mathbb{R}^3 :

$$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{Grad} \Omega_1(U) \xrightarrow{Rot} \Omega_2(U) \xrightarrow{Div} \Omega_3(U) \longrightarrow 0$$

$$\underline{Rot(Grad) = 0} \text{ et } \underline{Div(Rot) = 0}$$

3.3.2 Cohomologie

Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle s'est dire que f appartient au noyau de d : $Ker d$ donc que f est localement constante (i.e constante par composante connexe. Ce noyau renseigne donc sur la connexité de U . En mathématiques, on pose $H_0(U) = Ker d$. Mais on peut dire des choses supplémentaires : dire qu'une 1 forme est exacte, c'est dire qu'elle provient de la différentielle d'une fonction (ou d'un champ de gradients) elle est alors dans l'image de l'opérateur d : $Im d$. On sait alors que son rotationnel est nul (une forme exacte est fermée). L'obstruction à la réciproque de cette assertion est exactement ce qui est contenu dans le premier groupe de cohomologie : $H_1(U) = Ker d / Im d$. L'itération de ce procédé définit la cohomologie de De Rham. C'est un outils algébrique puissant permettant la compréhension de la topologie d'objets non triviaux, on entre dans le domaine de la topologie algébrique

3.4 Algébrisation calcul et analyse tensorielle

Une forme différentielle est "algébriquement" une forme linéaire donc un élément de E^* , en dimension finie, l'isomorphisme canonique, entre E et E^{**} prouve qu'on ne peut rien créer de nouveau. Vecteurs et formes permettent de créer le calcul tensoriel, l'algèbre multilinéaire permet de créer des objets du type : $e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_p^*(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\rho} \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^* \otimes e_{\rho(2)}^* \otimes \dots \otimes e_{\rho(p)}^*(x_1, \dots, x_p)$ ou plus généralement :

$$T = t_i^{jk} e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$$

On peut étendre ces définitions sur un ouvert U de \mathbb{R}^n et définir des formes différentielles de degrés quelconques :

$$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Tout cela est le germe du calcul tensoriel local. Il reste à passer au global et pour cela disposer d'objets plus riches que les ouverts de \mathbb{R}^n . Il faut définir des variétés abstraites.

3.5 Le vocabulaire de la géométrie différentielle

Pour pouvoir résoudre des problèmes globaux, les ouverts de \mathbb{R}^n , ou même \mathbb{R}^n ne suffisent pas, penser par exemple à la construction de solutions maximales d'équations différentielles, l'espace des phases peut avoir une topologie non triviale. Il faut construire des objets qui généralisent les ouverts. Il faut définir le concept de variété :

Une variété topologique est un espace topologique qui est localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n , une variété différentiable est un objet qui est localement difféomorphe à \mathbb{R}^n .

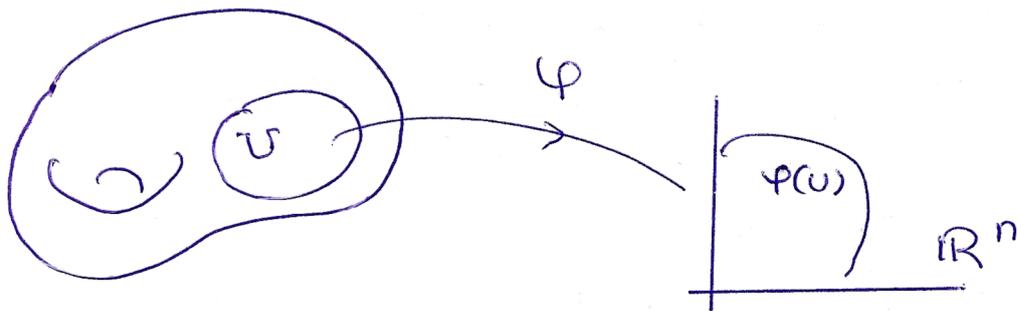


FIGURE 1 – Lecture dans une carte

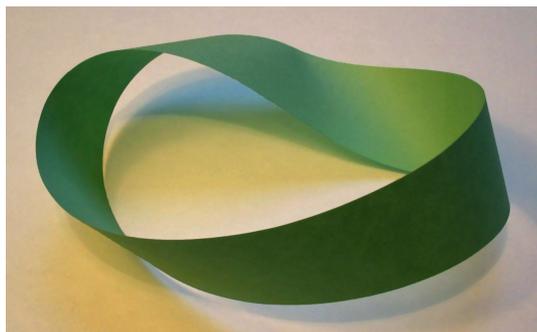


FIGURE 2 – Exemple de variété

3.5.1 Variétés différentiables

Il est naturel de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel. La généralisation de la notion de différentiabilité va donc se faire au travers des cartes.

Définition : On dit que M est une variété différentiable de classe \mathcal{C}^r si :

- M est une variété topologique

-Les changements de cartes sont de classe \mathcal{C}^r :

Il existe un atlas réunion des (U_i, φ_i) tel que : $\forall (i, j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe \mathcal{C}^r . On dira qu'une fonction f de la variété M dans \mathbb{R} est différentiable de classe \mathcal{C}^r quand pour toute carte locale (U, φ) l'application :

$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable et de classe \mathcal{C}^r :

Coordonnées locales : Soit (U, φ) une carte locale de la variété différentiable M pour tout point p de l'ouvert U , $\varphi(p)$ peut s'écrire :

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)).$$

On dira que $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ sont les coordonnées de p lues dans la carte (U, φ)

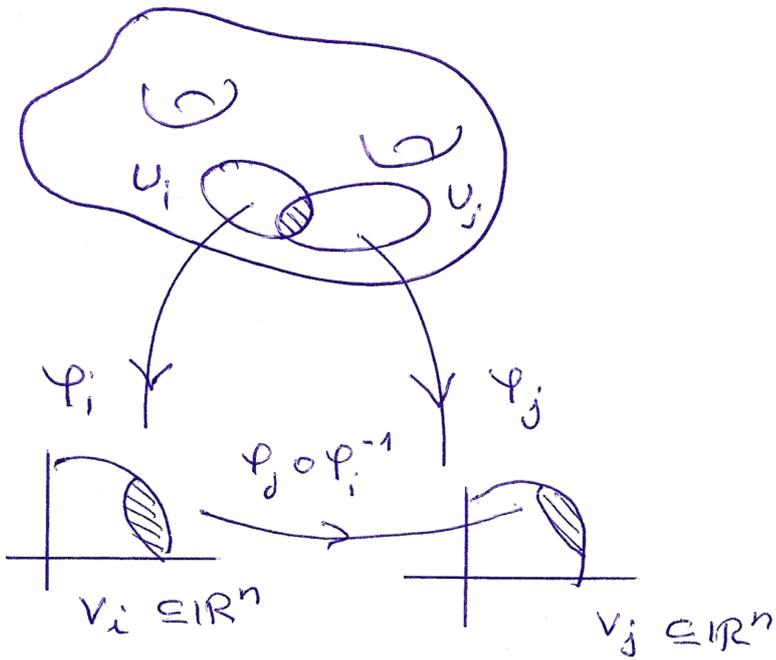


FIGURE 3 – Variété différentiable

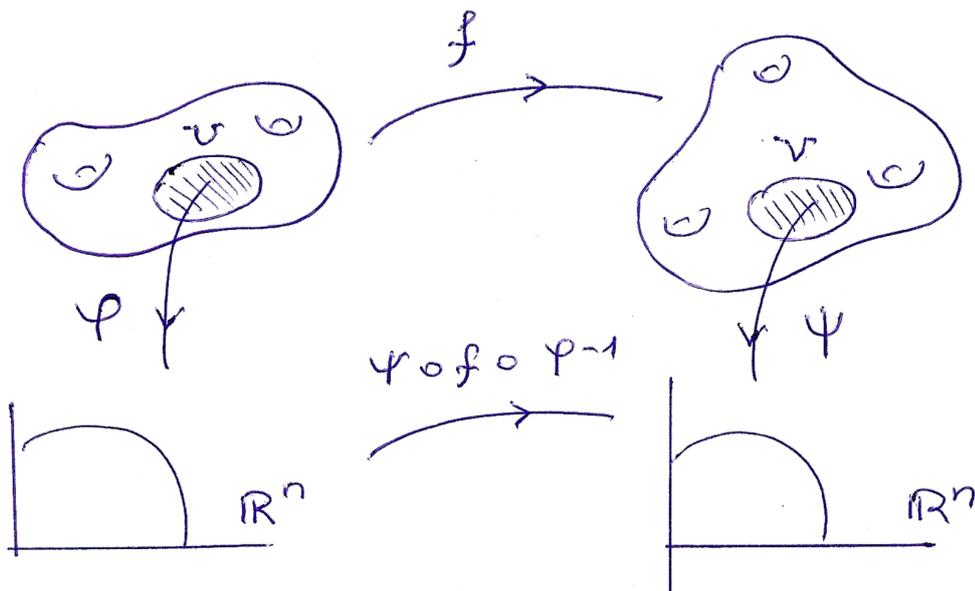


FIGURE 4 – Application différentiable entre variétés

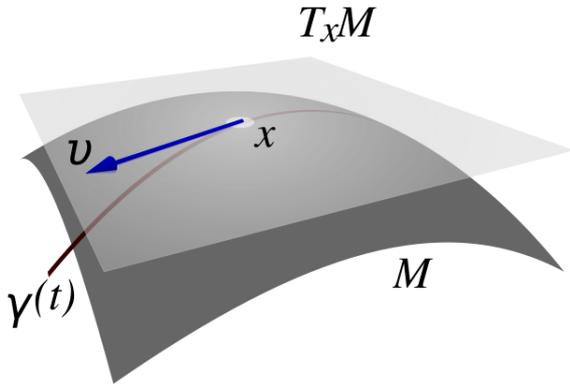


FIGURE 5 – Vecteur tangent

3.5.2 Espace tangent : première approche

Une sphère est un cas particulier très simple de variété. On a l'habitude de la voir plongée dans un l'espace \mathbb{R}^3 . On visualise donc bien l'espace tangent en un point p de la dite sphère : il s'agit du plan tangent à la sphère au point p . Cependant nous aimerions construire cet espace dans une démarche intrinsèque sans faire référence à l'espace extérieur ; deux constructions existent et elles sont bien sûr équivalentes.

Première approche : tangentes à une courbe. Soit p un point de la variété M . On note \mathcal{C} , l'ensemble des courbes $\gamma : [-1, 1] \rightarrow M$ telles que $\gamma(0) = p$. Alors il existe un ε assez petit pour que l'image de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ soit inclus dans un ouvert de carte U . Notons (U, φ) , la carte en question et x^i les applications coordonnées sur cette carte. Alors la relation binaire ci dessous est une relation d'équivalence :

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \left(\frac{dx^i(\gamma(t))}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{dx^i(\gamma'(t))}{dt} \right)_{t=0}$$

Par définition l'espace tangent en p est l'ensemble des classes d'équivalences de \mathcal{C} pour cette relation.

3.5.3 Espace tangent : Deuxième approche

On peut définir autrement les vecteurs tangents : Seconde approche : dérivations. On considère l'espace vectoriel des fonctions \mathcal{C}^∞ sur M noté :

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty\}$$

Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence) :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U(\text{ouvert}) \subset M, p \in U / f|_U = g|_U$$

On note \tilde{f} une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$.

On appelle dérivation une application de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ dans \mathbb{R} qui satisfait la règle de Leibniz.

Espace tangent en p en coordonnées locales, une base de $T_p(M)$ est donnée par les n -dérivations : $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ dont les courbes associées sont les γ_i définies par :

$$x^i(\gamma_j(t)) = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } x^i(\gamma_i(t)) = t$$

Par suite, on notera $X^i(p)$ les coordonnées d'un vecteur tangent dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Ainsi

un vecteur tangent s'écrit en coordonnées locales :

$$X(p) = X^i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

3.5.4 Fibré tangent et champ de vecteurs

En chaque point p de la variété nous avons défini l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans $T_p M$ cette application s'appelle un champ de vecteurs. La réunion de tous les espaces tangents quand p parcourt la variété M s'appelle le fibré tangent et est noté

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Notations : L'application $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de TM sur M .

Une section est une application X de M dans TM telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est un champ de vecteurs.

On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ une application D de $\mathcal{F}(M)$ dans lui-même qui vérifie la relation de Leibniz : $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Par exemple, un champ de vecteur définit une dérivation par la relation : $(X.f)(p) = X(p).f$

Crochet de Lie : l'application : $[X, Y] = XY - YX$ est appelée crochet de Lie des champs de vecteurs et c'est une dérivation (grâce au lemme de Schwarz), son expression locale est : $[X, Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$

3.6 Le vocabulaire de la géométrie Riemannienne

Géométrie Riemannienne : Pour pouvoir faire des mesures de distances, calculer des aires, parler de courbure ou d'orthogonalité il faut une structure euclidienne c'est à dire définir un produit scalaire sur chaque espace tangent.

Une variété riemannienne est une variété différentielle dans laquelle on définit un produit scalaire sur chaque espace tangent qui varie de manière lisse. Dans le cadre riemannien, tous les outils du calcul tensoriel, sont exploités ; le produit scalaire est un deux-tenseur symétrique, on pourra définir la courbure à l'aide d'un tenseur : le tenseur de Riemann.

3.6.1 Variété riemannienne, métrique, connexion

On appelle Variété Riemannienne un couple (M, g) dans lequel M est une variété différentiable et g un champ \mathcal{C}^∞ de tenseur symétrique 2 fois covariant (produit scalaire) sur la variété. : $p \rightarrow \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$

On rappelle l'expression locale d'une telle métrique : $p \rightarrow g_{i,j}(p) dx^i(p) \otimes dx^j(p)$ On appelle connexion linéaire note $\nabla_X Y$ l'application bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ qui satisfait aux trois règles de bilinéarité suivantes :

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

Ainsi que la règle de Leibniz :

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$$

On peut remplacer Y par n'importe quel tenseur.

En coordonnées locales $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \Gamma_{i,k}^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, les $\Gamma_{i,k}^j$ sont les symboles de Christoffel et déterminent la connexion.

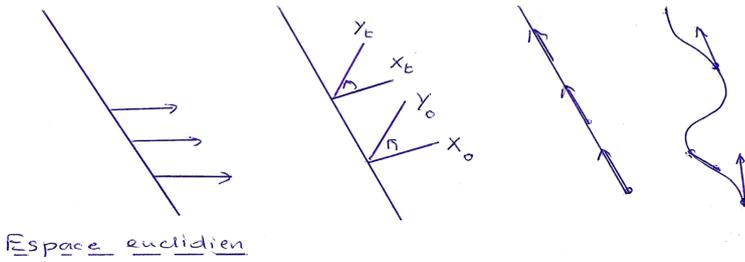


FIGURE 6 – Transport par translation

3.6.2 Connexion de Levi-civita

Le formalisme précédent peut être développé sur toute variété différentiable, sur une variété riemannienne il existe une connexion particulière unique :

Une connexion est symétrique (on dit aussi sans torsion) si $\Gamma_{i,k}^j = \Gamma_{k,i}^j$

Une connexion est compatible avec la métrique si :

$$X.(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Ce qui équivaut à : $\nabla_X g = 0$.

Connexion de Levi-Civita : c'est l'unique connexion symétrique (sans torsion), compatible avec la métrique sur une variété riemannienne. Les symboles de Christoffel sont déterminés en fonction de la métrique :

$$\Gamma_{j,k}^i = \frac{1}{2} g^{i,h} \left(\frac{\partial g_{k,h}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{j,h}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_h} \right)$$

dans cette expression $g^{i,h}$ désigne la matrice inverse de la métrique.

3.6.3 Derivation covariante, transport parallèle

La notion de transport parallèle généralise pour un espace courbe la translation dans l'espace euclidien :

Si on translate un vecteur le long d'une courbe \mathcal{C} , l'angle entre ce vecteur et un vecteur tangent à la courbe change si cette dernière n'est pas une droite ; le produit scalaire est conservé dans l'opération de translation d'un couple de vecteurs ; le vecteur directeur d'une droite est translaté le long de cette droite.

Transport parallèle le long d'une courbe : On considère maintenant une courbe $t \in [a, b] \rightarrow c(t) \in (M, g)$. On dit qu'un vecteur Y est déplacé parallèlement le long de la courbe c quand :

$$\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = 0$$

D est la dérivation covariante.

On a l'expression locale de la dérivée covariante :

$$\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = \left(\frac{dY^k(c(t))}{dt} + \Gamma_{i,j}^k(c(t)) X^i(c(t)) Y^j(c(t)) \right) \partial_k$$

A l'aide de la formule précédente, on voit immédiatement qu'un vecteur transporté parallèlement dans l'espace euclidien est translaté.

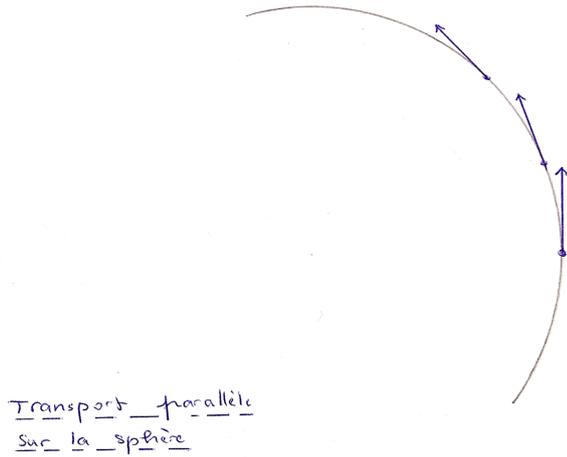


FIGURE 7 – Transport parallèle

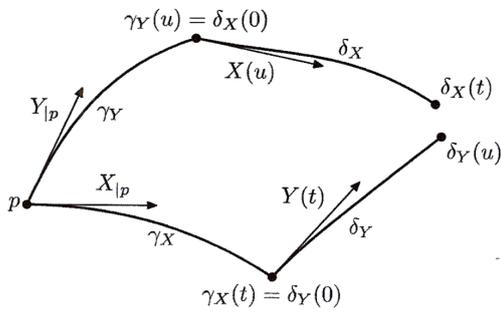


FIGURE 8 – Défaut de transport parallèle

3.6.4 Equation des géodésiques

On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement : $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales :

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = \frac{d^2x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma_{i,j}^k(c(t))\frac{dx^i(c(t))}{dt}\frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire, l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de Cauchy).

Les géodésiques de l'espace euclidien sont les droites. Les géodésiques de la sphère sont les grands cercles. Les méridiens ou les parallèles sont des exemples de géodésiques sur terre.

3.6.5 Tenseur de courbure De Riemann

La figure précédente met en évidence la torsion et la courbure ; si le parallélogramme se referme la torsion est nulle, mais le défaut "d'exactitude" du transport parallèle du vecteur Y définit le tenseur de courbure de Riemann en coordonnées locales :

$$R(X, Y)_p Z_p = R^k_{lij} X^i(p) Y^j(p) Z^l(p) = \left(\frac{\partial \Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial \Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p) \Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p) \Gamma^s_{i,l}(p) \right) X^i(p) Y^j(p) Z^l(p)$$

L'expression du tenseur de courbure de Riemann est donné par la formule :

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$$

Par contraction d'indice, on peut obtenir de nouveaux tenseurs :

Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant les indices k et l : $R_{i,j} = R^l_{ijl}$, en contractant encore on obtient la courbure scalaire : $S = g^{ij}R_{ij}$

3.7 Relativité Générale

Einstein est au courant des derniers travaux de Riemann et Levi-Civita au début du vingtième siècle. Il peut acoucher de sa théorie de la Relativité Générale. La relativité générale (gravitodynamique) joue le même rôle que l'électrodynamique dans la généralisation de l'électrostatique. Une généralisation de la théorie de Newton : Un succès de la relativité générale provient du fait qu'elle restitue en champ faible la loi de Newton. On retrouve l'équation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$.

3.7.1 L'équation d'Einstein

La matière dans l'univers est gouvernée par le tenseur d'énergie impulsion $T_{\mu\nu}$. Un des principe de physique requis est sa conservation : l'énergie et la matière sont conservées dans l'univers (par définition "le tout"). Dans la vision dynamique actuelle, cela se traduit par la nullité de la dérivé covariante du tenseur Energie impulsion :

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Einstein a cherché longtemps une expression dérivée du tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ ayant la même propriété : la solution vient de la deuxième identité de Bianchi qui est donnée par :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

On contracte deux fois par la métrique :

$$g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0$$

$$\text{soit : } \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0$$

$$\text{Donc : } \nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla^\mu g_{\mu\rho}R$$

$$\text{On pose : } G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \text{ Alors, } \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$$

Einstein en déduit la proportionnalité : $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$

3.7.2 Des théories dynamiques

La réponse de Maxwell

$$\begin{array}{lll} \phi \rightarrow A^\mu & & \\ \Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \delta_\nu(\delta^\mu A^\nu - \delta^\nu A^\mu) = \mu_0 J_\mu & \\ \text{electroSTATIQUE} & \rho \rightarrow J_\mu & \text{electroDYNAMIQUE} \\ & \Rightarrow & \end{array}$$

La réponse d'Einstein

$$\begin{array}{lll} \psi \rightarrow g^{\mu\nu} & & \\ \Delta\psi = 4\pi G\rho & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu} & \\ \text{gravitoSTATIQUE} & \rho \rightarrow T_{\mu\nu} & \text{gravitoDYNAMIQUE} \\ & \Rightarrow & \end{array}$$

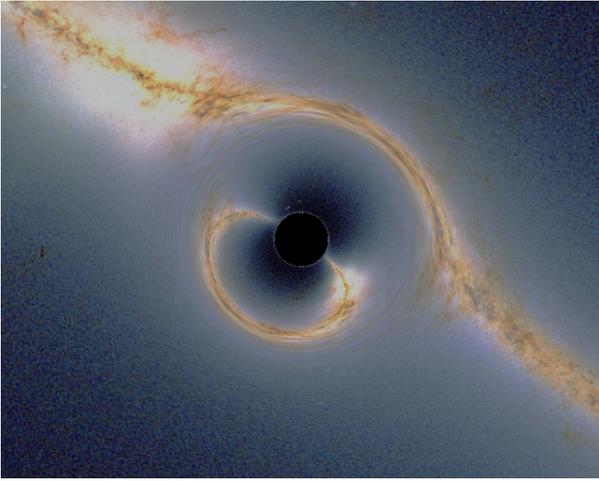


FIGURE 9 – Au voisinage d'un trou noir

3.7.3 Mécanique des fluides relativiste

La matière-énergie est vue comme un fluide. On rappelle que pour comprendre l'effet de la gravitation dans le cadre Newtonien, on doit résoudre l'Equation de Poisson : $\Delta\psi = 4\pi G\rho$ ainsi deux équations aux dérivées partielles.

Equation de continuité : L'équation de continuité dit que la quantité de matière $Q(t2)$ contenue dans un élément volume au temps $t2$ est égale à la quantité de matière $Q(t1)$ à l'instant $t1$ augmentée de ce qui est entré de $t1$ à $t2$ et diminuée de ce qui est sorti pendant le même temps. cette équation de continuité s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$

Equation d'Euler : C'est pour la mécanique des fluides, l'équation fondamentale de la dynamique. Pour une particule dans un champs de pesanteur on avait : $\frac{dv}{dt} = -\nabla U$, un fluide est de plus soumis à des forces de pression et n'est pas ponctuellement localisé, l'équation devient : $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p$

Dans le cadre de la relativité générale il suffit de résoudre l'équation d'Einstein : $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu}$

3.7.4 Solution de l'équation d'Einstein : métrique de Schwarzschild

On recherche la solution à symétrie centrale de la métrique au voisinage d'une boule fluide à l'extérieur puis à l'intérieur.

1. On trouve à l'extérieur :

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

2. On trouve à l'intérieur :

$$ds^2 = -(1 - \frac{2Gm(r)}{r})dt^2 + (1 - \frac{2Gm(r)}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Ici $m(r)$ tend plus vite vers 0 que r .

Pour r infini, on retrouve la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques.

3.7.5 Cosmologie : métrique de Roberson Lemaitre Walker

Une deuxième solution connue des équations d'Einstein est le cas d'un univers isotrope et homogène en expansion sans centre privilégié. Il est facile alors de comprendre que si la matière est distribuée de manière uniforme la courbure (de genre espace) sera la même partout.



FIGURE 10 – L'univers homogène

1. La résolution de l'équation d'Einstein donne :

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2d\Omega^2\right] \quad K \text{ est la courbure}$$

2. $K > 0$: univers sphérique
3. $K = 0$: espace euclidien
4. $K < 0$: univers hyperbolique

3.7.6 Les équations de Friedmann, un système dynamique

1. Contenu "géométrique" $G_{\mu,\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$

avec les symétries, $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, $R_{0i} = 0$, $R_{ij} = -(2H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{K}{a^2})g_{ij}$,

$R = -6(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2})$. Ici H , paramètre de Hubble représente le taux d'expansion de l'univers.

2. Contenu "matériel" $T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p)u_i u_j + pg_{ij}$ d'où $T_{00} = \rho(t)$, $T_{0j} = 0$, $T_{ij} = pg_{ij}(t, r)$
3. Equations de Friedmann $H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$, $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$

conservation de l'énergie impulsion entraîne $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$.

4. 2 équations indépendantes, il manque une équation "d'état" $p = w\rho$, w constante.
5. Alors immédiatement $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ permet de cerner le contenu (global) de l'univers à l'instant t :

$w = 0$: matière froide, $w = 1/3$: radiation, $w = -1$ "énergie du vide.

3.7.7 Formation des grandes structures, l'univers hétérogène

L'univers n'est évidemment homogène qu'aux grandes échelles ou dans un milieu très chaud. Un sujet de recherche actuel en cosmologie est la formation des grandes structures telles qu'elles

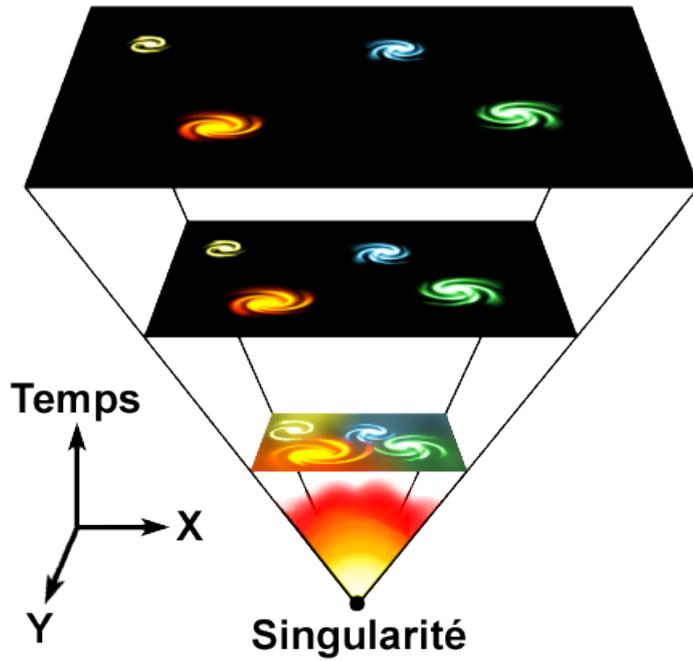


FIGURE 11 – Expansion de l'univers : cas euclidien

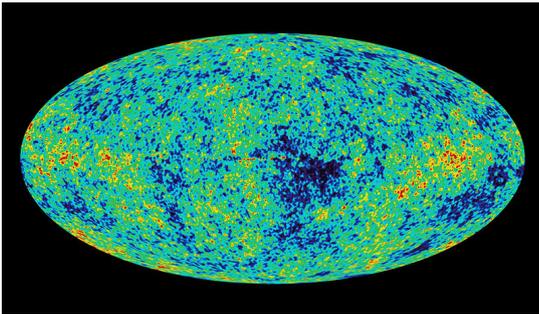


FIGURE 12 – Cartographie de WMAP

se dessinent à partir des cartes obtenues par Cobe, W-map.

L'idée est de perturber localement la gravité et voir ce qui se passe.

En Newtonien on déforme un peu la densité (loi de Poisson), les paramètres de pression et de vitesse puis on linéarise les équations de Navier-stokes en tenant compte de l'expansion de l'univers on obtient :

$$\partial_t^2 \delta\rho + 2H\delta\rho - \frac{c_0^2}{a^2} \Delta\delta\rho = 4\pi G\bar{\rho}\delta\rho$$

Cette équation dit que l'univers est dominé par la gravité (formation de structures) ou la pression (ondes) mais que l'expansion (facteur amortissant) permet de passer d'un mode à l'autre.

Pour les grosses perturbations, le problème est plus complexe et doit se résoudre en R.G en perturbant la métrique.

4 Bâtir une géométrie de l'infiniment petit

La présence de singularités : trous noirs, singularité primordiale (Big bang) indique que la physique et la géométrie doivent être comprises en dessous de la distance de Planck : il faut développer une géométrie compatible avec la mécanique quantique. Aucune approche actuelle-

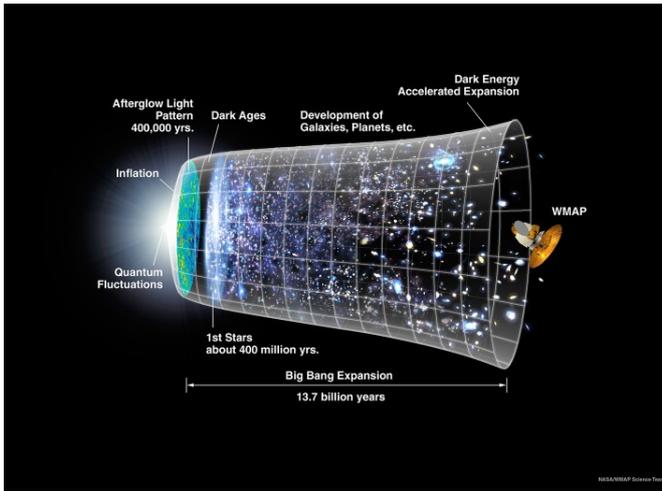


FIGURE 13 – l’Hypothèse de l’inflation cosmologique

ment proposée n’est entièrement satisfaisante.

Nous développerons essentiellement la théorie des cordes mais d’autres théories sont dignes d’intérêt comme la géométrie non commutative (A. Connes), la gravité à boucle (C. Rovelli).

La théorie des cordes est assez spéculative, pourtant les développements récents des années 1990 à 2009 de la symétrie miroir ont vu interagir géométrie complexe (variétés de Calabi-Yau surfaces de Riemann), géométrie énumérative, algébrique, symplectique, champs algébriques, théorie des déformations, topologie algébrique (branes et foncteurs dérivés) et modélisation physique.

Une théorie inachevée : il existe pas moins de 5 théories des cordes acceptables, laquelle choisir ?, quelle théorie M serait la théorie du tout ?

5 La physique des champs et de cordes

En physique quantique, les mouvements des particules ne sont pas connus de façon certaine. En physique macroscopique, une particule non dérangée suit sa ligne de vie, (géodésique obtenue en minimisant une action définie comme l’intégrale d’un Lagrangien $L(x, \dot{x})$: Pour la particule libre $S(x, \dot{x}) = \int_0^t \dot{x}^2 d\tau$), en revanche, en dessous de la distance de Planck on ne peut plus envisager de trajectoire déterministe. Il faut remplacer la géodésique par l’amplitude de probabilité d’aller de x à y en un temps t : C’est l’intégrale de chemin.

$$\Phi_t(x, y) = \int_{[0,t] \rightarrow M} \mathcal{D}x \exp(-S(x, \dot{x}))$$

Dans cette dernière intégrale on a des inconnues. M n’est pas forcément une variété Riemannienne et l’espace de départ un simple intervalle ; Ils doivent être adaptés dans le cadre de la théorie des cordes.

5.1 La formulation Hamiltonienne

Pour la quantification il est commode d’introduire la formulation Hamiltonienne : en posant $x_i = q_i, \dot{x}_i = \dot{q}_i$ les coordonnées généralisées en introduisant les moments (quantités de mouvement) $p_i = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Dans les bonnes situations, la transformée de Legendre du Lagrangien donne l’hamiltonien

$$H(q_i, p_i) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q_i, \dot{q}_i).$$

Dans les cas intéressants, H est une quantité indépendante du temps, l’Energie du système et obéit au système différentiel autonome :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

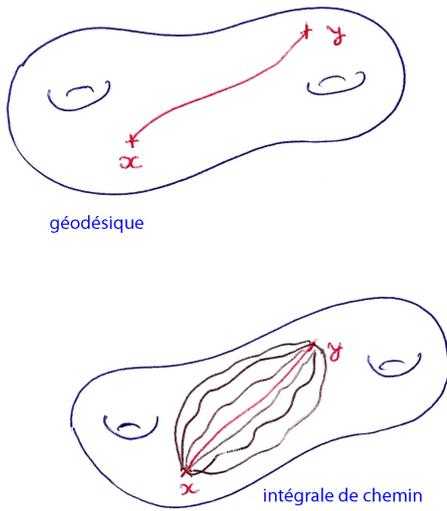


FIGURE 14 – Chemin classique, chemin quantique

Les coordonnées moments (q_i, p_i) définissent un espace des phases à $2n$ dimensions qui possède en outre une structure de variété symplectique avec la deux forme $\omega = dq_i \wedge dp_i$

5.2 Dictionnaire classique - quantique

En mécanique quantique, on remplace la position de la particule au point $x \in X$ par la probabilité d'observer la particule au point $x : P(x) = \frac{|\psi(x)|^2}{\langle \psi | \psi \rangle}$ où $\psi \in L^2(X) = \mathcal{H}$ est la fonction d'ondes associée à la particule ponctuelle "pt". \mathcal{H}_{pt} est l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes des particules.

La géodésique est remplacée dans le temps par l'opérateur unitaire d'évolution $\Phi_{\mathbb{C}}(t) : \mathcal{H}_{pt} \rightarrow \mathcal{H}_{pt}, \psi(x) \mapsto e^{itH} \psi(y)$

La notation exponentielle est justifiée par : $\Phi_{\mathbb{C}}(t_1 + t_2) = \Phi_{\mathbb{C}}(t_2) \circ \Phi_{\mathbb{C}}(t_1)$

Ce qui peu aussi se voir du point de vu lagrangien avec l'intégrale de chemin :

$$\Phi_t(x, y) = \int_{[0,t] \rightarrow M} \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp(-L(x, \dot{x})) = e^{-tH} \text{ avec } q(0) = x; q(t) = y$$

Et la règle de composition : $\Phi_{t_1+t_2}(x, z) = \int_X dy \Phi_{t_1}(x, y) \Phi_{t_2}(y, z)$

5.3 Théorie des cordes bosoniques

Aux petites échelles la particule devrait être vue comme une corde ouverte ou fermée. L'action classique est l'action de Nambu-Goto qui se comprend bien mais se quantifie mal :

$$S = -T \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} X')^2} \text{ avec } \dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}, \dot{X} X' = \dot{X}^\mu X'^\nu \eta_{\mu\nu}$$

L'espace des paramètres défini ici une surface de Riemann Σ (worldsheet), T est la tension de la corde, l'action ici minimise l'aire balayée par la corde.

En considérant une métrique intrinsèque $g_{\alpha\beta}$ sur la surface de Riemann Σ , on peut définir une action quantifiable et équivalente, l'action de Polyakov :

$$S = -T/2 \int_{\Sigma} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}(\sigma, \tau) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} d\sigma d\tau$$

On généralise l'intégrale de chemin : $\Phi_{\Sigma} = \int_{X:\Sigma \rightarrow M} \mathcal{D}x \exp(S)$

Ici M est une variété (pseudoriemannienne) de dimension D suffisamment grande ($D = 26$ pour la théorie des cordes bosoniques).

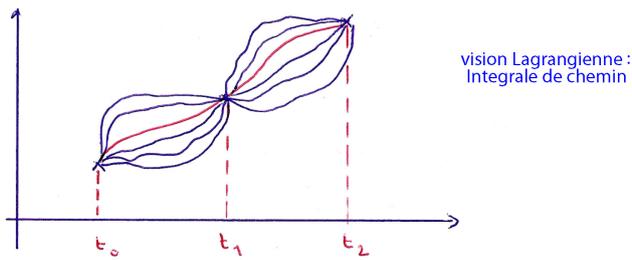
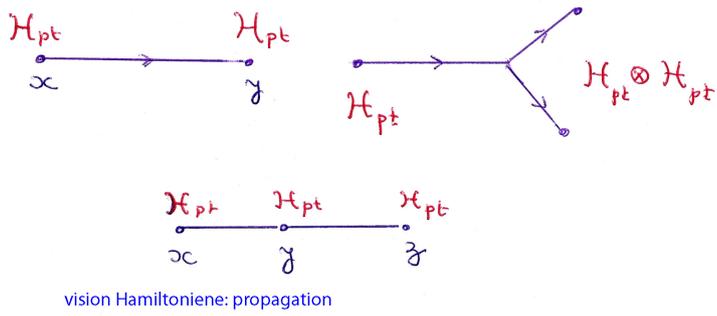


FIGURE 15 – Propagation dans le monde quantique

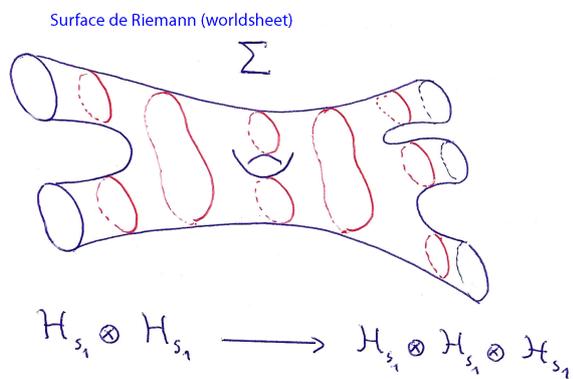
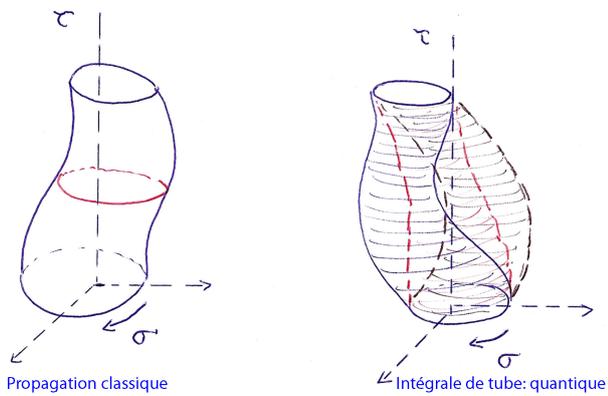


FIGURE 16 – Propagation des cordes

5.4 Equation du mouvement de la corde relativiste classique

La minimisation de la fonctionnelle d'Euler Lagrange fournit l'équation du mouvement de la corde qui est : $(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2})x^\mu = 0$

On reconnaît l'équation des ondes dont la solution est : $X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma)$. Pour les cordes fermées, on a :

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{X^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2} \bar{p}^\mu(\tau - \sigma) + i \frac{l_s}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)}$$

Dans ces écritures, l_s est la longueur de la corde, α_k^μ , $\bar{\alpha}_k^\mu$, les modes de vibrations qui déterminent les masses des particules.

Le premier et le deuxième terme de ces développements de Fourier représentent la position et la quantité de mouvement du centre de masse. On peut définir des équations similaires pour les cordes ouvertes en imposant deux types de conditions aux extrémités de la corde de Neuman ou Dirichlet pour les coordonnées, ainsi on peut définir l'attache des cordes à des p-branes...

5.5 Quantification de la corde bosonique

La formulation hamiltonienne associée au principe de moindre action, comme pour une particule conduit à définir les crochets de Poisson : $\{P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)\} = \delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$ avec $p^\mu = -\frac{\partial S}{\partial x^\mu}$

Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Poisson pour les modes :

$$\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\} = -im\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$$

La quantification des crochets de Poisson fournit les crochets de Lie :

$$[P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta_{\mu\nu}$$

Les développements en séries de Fourier, fournissent les crochets de Lie pour les modes :

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta_{\mu\nu}$$

On peut alors définir l'espace de Hilbert des états d'une corde qui est l'espace de Fock et qui gère les vibrations de la corde.

Il y a des contraintes sur la dimension de l'espace pour éviter les états de masses négatives : "tachyons". Il faut contraindre $D = 26$ dans la théorie des cordes bosoniques.

6 Modèles géométriques et topologiques de la théorie des cordes

L'introduction des cordes bosoniques, montre que l'existence des cordes requière une dimension d'espace égale à 26 et notre univers macroscopique n'en a que 4, on s'en sort en compactifiant les dimensions supérieures à 4, on a des dimensions enroulées.

Les théories de cordes sont des théories de champs conformes, la surface de riemann source peut être munie d'une structure complexe : la géométrie complexe fait son apparition.

Des théories supersymétriques de la physique enrichissent la théorie classique : théorie des supercordes, par l'introduction de variables fermioniques ; ainsi on peut montrer que les dimensions supplémentaires se réduisent à 6 et sont compactifiées en variétés kahleriennes particulières : l'espace temps est fibré en variétés de Calabi-Yau

Les progrès récents (années 90) ont conduit à définir d'étranges dualités T-dualité et la symétrie miroir qui en est une généralisation.

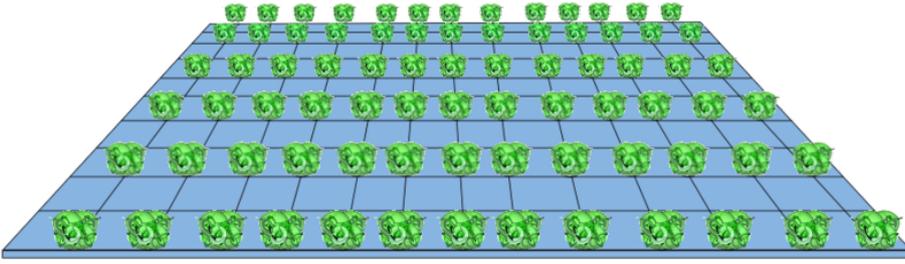


FIGURE 17 – Les dimensions enroulées



FIGURE 18 – Une variété de Calabi Yau

6.1 Théorie des cordes en cosmologie

Une énigme résiste encore : c'est la faiblesse de l'interaction gravitationnelle par rapport aux autres. Le graviton, particule véhiculant la gravitation, est représenté par une corde fermée. Les autres interactions (cordes ouvertes) seraient attachées à notre brane. En fait les gravitons seraient capables de quitter notre brane.

En se balladant au travers des univers branaires, le graviton dilurait ainsi la force de gravitation dans les dimensions supplémentaires.

Les différentes branes pourraient aussi entrer en collisions, créant ainsi de nouveaux univers ; le Big Bang ne serait pas une singularité isolée.

Enfin pour l'instant ces théories sont assez spéculatives et ne font pas l'adhésion de tous les spécialistes.

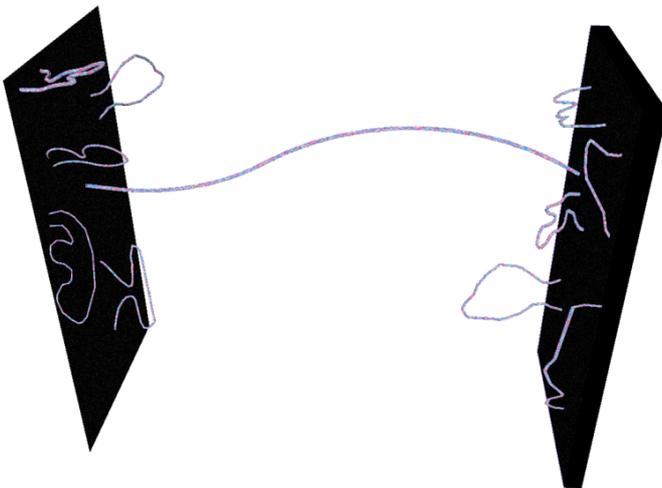


FIGURE 19 – Les branes

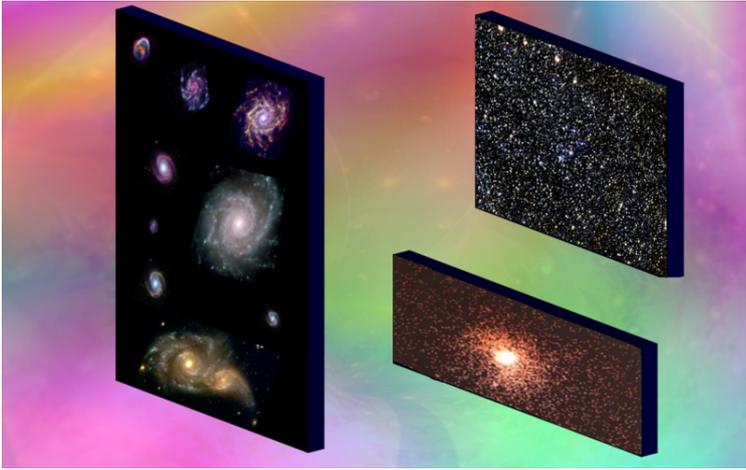


FIGURE 20 – Les univers branaires

7 Autres voies pour expliquer la gravité quantique

Une géométrie, proche de la mécanique quantique est proposée par Alain Connes, c'est la géométrie non commutative. L'idée d'Alain Connes est d'associer à un espace géométrique X une algèbre \mathcal{A} éventuellement non commutative. Par exemple, en raisonnant sur l'algèbre des fonctions $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X)$ il retrouve X mais il peut aussi la coupler à des structures non commutatives "algèbre de matrices" décrivant les symétries internes des particules.

Carlo Rovelli a inventé la gravité quantique à boucles ; son idée est de quantifier directement l'espace temps de la relativité générale ; il montre qu'aux échelles de Planck, l'espace et le temps sont constitués d'entités discrètes.

8 Synergie avec les systèmes dynamiques

Les équations de la relativité générale donnent lieu à l'étude de systèmes dynamiques intéressants, particulièrement dans l'étude de la formation des grandes structures. Les données du satellite Planck, lancé récemment, devraient permettre d'affiner les modélisations ; des simulations numériques pourraient être améliorées avec les logiciels de calculs formels comme matlab ou mathematica.

Des modèles de théories topologiques, l'étude importante des théories renormalisables font appel aux systèmes intégrables, au flot de renormalisation et se décrivent bien en tant que systèmes dynamiques.

Références

- [1] Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Taylors Francis, New York, 2003.
- [2] D.McDuff, D.Salamon, *Introduction to symplectic geometry* Oxford University Press, 1995.
- [3] D.McDuff, D.Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, Univ. Lecture series 6, A.M.S., 1994.
- [4] M. Kontsevich, Y.Manin, *Gromov-Witten Class, Quantum Cohomology, and enumerative Geometry*, Mirror symmetry II, A.M.S/IP Studies in advanced Math., Vol 1 A.M.S, 1997, pp. 607-653.
- [5] M.Audin *Cohomologie quantique* Séminaire Bourbaki, n° 807, 1995.
- [6] S.Donaldson, P. Kronheimer, *The geometry of four manifolds*, Oxford University Press, 1990.

- [7] K. Becker, MBecker, J. H. Schwarz *String theory and M-theory* Cambridge, 2007.
- [8] B.Zwiebach, *A first course in sting theory*, Cambridge, 2004. Press, 1990.
- [9] K.Hori, S. Katz, A. Klem, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror symmetry*, AMS, 2003. Press, 1990.