



Une critique du modèle de Kelvin-Neumann pour les vagues et une alternative

Déferlement/ capillarité/ instabilités de surface

Philippe Destuynder ¹ et Caroline Fabre ²

¹ Chaire de Calcul Scientifique, Cnam, Paris, FRANCE

² Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Orsay, FRANCE



Quelques références...

Y. Doutreleau, *Résonances pour le problème de Neumann-Kelvin tridimensionnel dans le cas d'un corps immergé*, 5^{me} journées de l'hydrodynamique, mars 1995, Rouen.

C. Van der Stoep, *A three dimensional method for the calculation of the unsteady ship wave pattern using a Neumann-Kelvin approach*, Thesis university of technology of Delphht, February 6th 1992.

J.J. Stoker, *Water waves, Pure and applied mathematics vol. IV*, Intersciences publishers, inc., New York, (1957).

E. F. Campana and A. Iafrati, *Direct numerical simulation of surface tension dominated and non-dominated breaking waves*, 24th symposium on Naval hydrodynamics, Fukuoka Japan, July 2002.

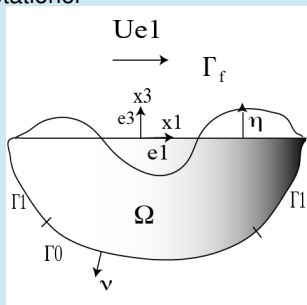
PLAN

- 1 **Modélisation**
 - Dans l'eau
 - Modèle stationnaire
 - Modèle pour φ
 - Modèle local à la surface de l'eau
- 2 **Elimination d'un des deux champs inconnus**
 - L'opérateur G
 - Outils mathématiques
 - Le modèle en η
 - Stabilité et instabilité des vagues
 - Dégénérescence de la compacité
 - Exemple analytique
 - Evolution des vitesses critiques en fonction de σ
 - Evolution du germe instable
- 3 **Le modèle en φ**
 - Elimination de η
 - Le modèle de Neumann-Kelvin enrichi
 - Prolongements

Le modèle fluide

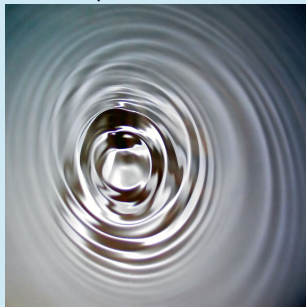
Dans l'eau

Ecoulement incompressible,
irrotationnel



A la surface

Modèle avec capillarité



Dans l'eau

$$\Phi = U\Phi_0 + \varphi,$$

$U\Phi_0$ potentiel stationnaire, φ potentiel de perturbation

Le potentiel stationnaire vérifie :

$$-\Delta\Phi_0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_f \cup \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\nu} = (\mathbf{e}_1, \nu) \text{ sur } \Gamma_1, \quad \text{et par exemple } \int_{\Gamma_f} \Phi_0 = 0.$$

On peut mettre un sous-marin dans Ω sans que cela ne change la formulation (partie de Γ_0). Le cas d'un bateau de surface est aussi possible mais un nouveau phénomène apparaît.

Toujours dans l'eau mais pour le potentiel de perturbation φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \dot{\eta} + U\nabla_s\Phi_0 \cdot \nabla_s\eta \text{ sur } \Gamma_f, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \text{ et par exemple } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Sur la frontière $\partial\Gamma_f$ de Γ_f , on peut choisir par exemple $\eta = 0$ ou η périodique en x_1 .

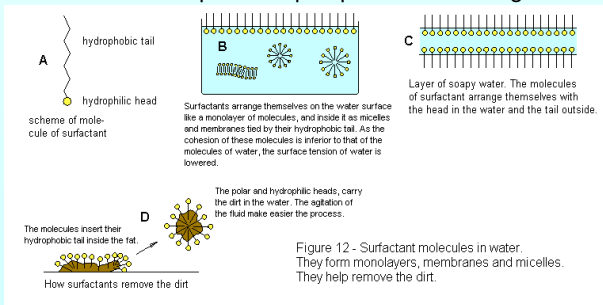
A la surface de l'eau :

L'équilibre de la surface prend en compte la capillarité, la gravité et la pression de l'eau :

$$\underbrace{-\sigma \Delta_s \eta}_{\text{capillarité}} + \underbrace{\rho g \eta}_{\text{gravité}} + \underbrace{\rho \dot{\varphi} + \rho U \nabla_s \Phi_0 \nabla_s \varphi + \frac{\rho}{2} |\nabla \varphi|^2}_{\text{opposée de la pression instationnaire}} = 0 \text{ sur } \Gamma_f,$$

$$\eta = 0 \text{ sur } \partial \Gamma_f.$$

Un modèle plus complet peut être envisagé



Deux stratégies : éliminer φ ou éliminer η

Dans tous les cas un opérateur de condensation est utile de façon à se ramener sur la surface Γ_f . Nous le notons G et il joue un rôle fondamental dans toute la suite. Dans le cas d'un milieu semi-infini ce serait l'opérateur de Green. C'est en fait l'opérateur de masse ajoutée.

Définition de G .

Soit g une fonction définie sur Γ_f . On introduit $G(g)$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta G(g) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial G(g)}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \frac{\partial G(g)}{\partial \nu} = g \text{ sur } \Gamma_f, \\ G(g) = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{array} \right.$$

Propriété fondamentale de G

On introduit les espaces de dérivées fractionnaires $H^{1/2}(\Gamma_f)$ et son dual $H^{-1/2}(\Gamma_f)$. On peut intuitivement considérer que les fonctions de cet espace $H^{1/2}$ sont telles que en dimension n , ($n = 1, 2$) :

$$\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{1/2+n/2}} \in L^2(\Gamma_f \times \Gamma_f).$$

On a alors la suite d'inclusions compactes (qui transforment un ensemble borné en un ensemble relativement compact) :

$$H^1(\Gamma_f) \subset H^{1/2}(\Gamma_f) \subset L^2(\Gamma_f) \subset H^{-1/2}(\Gamma_f).$$

Dans ce cadre nous avons :

$$c_0 \|g\|_{-1/2, \Gamma_f} \leq \|G(g)\|_{1/2, \Gamma_f} \leq c_1 \|g\|_{-1/2, \Gamma_f}.$$

Intérêt des injections compactes

Le théorème spectral

Soient :

- $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique positive et équivalente au carré de la norme sur un espace de Hilbert V ,
- $m(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique positive et équivalente au carré de la norme sur un espace de Hilbert H .

On considère le problème de valeurs propres :

$$(u, \lambda) \in V \times \mathbb{R}, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = \lambda m(u, v), \quad m(u, u) = 1.$$

Le théorème spectral s'énonce ainsi : (la famille u_n est une base hilbertienne de H)

Si $V \subset H$ avec compacité alors :

$$\exists (u_n, \lambda_n), \quad \lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty \text{ et } \lambda_n > 0 \text{ multiplicité finie } (\lambda_n \geq \lambda_0 > 0)$$

Si $H \subset V$ avec compacité alors :

$$\exists (u_n, \lambda_n), \quad \lambda_n \rightarrow 0 \text{ et } 0 < \lambda_n \leq \lambda_0 \text{ avec multiplicité finie.}$$

Application du théorème spectral aux vagues

On a sur Γ_f :

$$\varphi = G(\dot{\eta} + U\nabla_s\eta \cdot \nabla_s\Phi_0) = G(\dot{\eta}) + UG(\nabla_s\eta \cdot \nabla_s\Phi_0).$$

On obtient ainsi que η est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in V = H_0^1(\Gamma_f), \\ \underbrace{\rho \int_{\Gamma_f} G(\ddot{\eta}) v}_{\text{inertie du bassin}} + \underbrace{U \int_{\Gamma_f} [G(\nabla_s\dot{\eta} \cdot \nabla_s\Phi_0)v - G(\dot{\eta})\nabla_s v \cdot \nabla_s\Phi_0]}_{\text{couplage cinétique}} \\ \underbrace{+ \int_{\Gamma_f} \sigma \nabla_s\eta \cdot \nabla_s v + \rho g \eta v}_{\text{capillarité+gravité}} - \underbrace{U^2 \int_{\Gamma_f} G(\nabla_s\eta \cdot \nabla_s\Phi_0)\nabla_s v \cdot \nabla_s\Phi_0}_{\text{retard de pression}} = 0. \end{array} \right.$$

Ou encore sous forme variationnelle avec des notations évidentes :

$$\forall v \in V, \mathcal{M}(\ddot{\eta}, v) + 2UC(\dot{\eta}, v) + \mathcal{A}_0(\eta, v) - U^2\mathcal{A}_1(\eta, v) = 0.$$

Notion de vitesse critique

On considère le problème de valeurs propres :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } w \in V, \text{ tel que :} \\ \forall v \in V, \mathcal{A}_0(w, v) = \lambda \mathcal{A}_1(w, v), \mathcal{A}_1(w, w) = 1. \end{array} \right.$$

Si $\sigma > 0$ on choisit :

$$V = H_0^1(\Gamma_f) \quad H = H^{1/2}(\Gamma_f).$$

Par conséquent $\exists \lambda_0 > 0$ telle que :

$$\forall v \in V, \mathcal{A}_0(v, v) \geq \lambda_0 \mathcal{A}_1(v, v),$$

d'où :

$$U < U_c = \sqrt{\lambda_0} \Rightarrow \mathcal{A}_0(v, v) - U^2 \mathcal{A}_1(v, v) \geq c \|v\|_{1, \Gamma_f}^2,$$

ce qui implique la stabilité du modèle et l'instabilité si $U > U_c$. Le nombre de modes instables pour U donnée est fini, décroissant avec σ .

Renversement de la compacité

On suppose que $\sigma = 0$. Cette fois on choisit :

$$V = L^2(\Gamma_f) \text{ (au lieu de } H_0^1(\Gamma_f)) \text{ et } H = H^{1/2}(\Gamma_f).$$

Cette fois on a :

$$H \subset V \text{ avec compacité.}$$

Par conséquent le modèle de valeurs propres est inversé :

$$\exists \lambda_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } 0 < \lambda_n \leq \lambda_0.$$

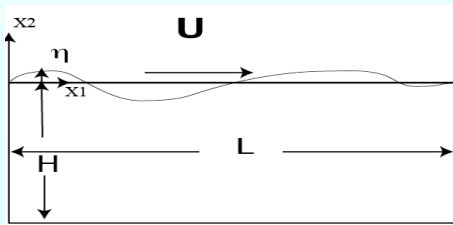
Donc :

$$\forall U > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \lambda_n < U.$$

Donc quelque soit la vitesse U il existe une infinité de modes instables. Dans un raffinement de maillage lors d'une approximation numérique, la situation s'aggrave !

L'explication physique est que l'absence de capillarité fait qu'un écoulement même à très faible vitesse fait éclater la surface de l'eau. Le modèle n'a pas de sens. Or c'est le modèle de Kelvin-Neumann.

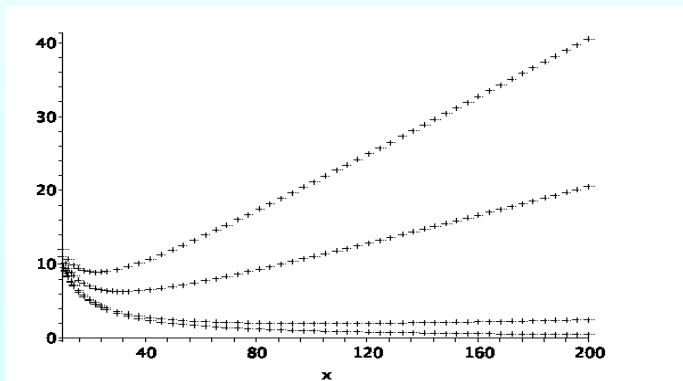
Un cas simple pour illustrer



On trouve les solutions suivantes au modèle de valeurs propres :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right), \\ G_n(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \coth\left(\frac{n\pi(x_2 + H)}{L}\right), \\ \lambda_n = H\left[g + \frac{n^2 \pi^2 \sigma}{L^2 \rho}\right] \frac{\tanh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)}{\frac{n\pi H}{L}} \simeq \frac{Lg}{n\pi} + \frac{n\pi \sigma H}{L\rho}. \end{array} \right.$$

Comportement des valeurs propres (et donc de U_c^2)



On a tracé plusieurs courbes en fonction de σ . La courbe en gras correspond à $\sigma = 0$.

Prise en compte de la non-linéarité sur une instabilité

Le modèle non-linéaire de vague est :

$$\forall v \in V, \mathcal{M}(\ddot{\eta}, v) + 2UC(\dot{\eta}, v) + \mathcal{A}_0(\eta, v) - U^2 \mathcal{A}_1(\eta, v) + \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_f} |\nabla G(\dot{\eta} + U \nabla_s \eta \cdot \nabla_s \Phi_0)|^2 v = 0$$

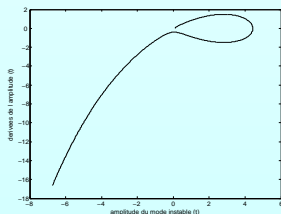
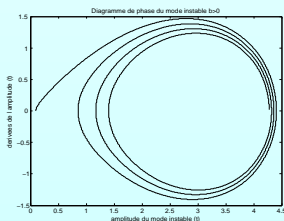
Pour simplifier, cherchons une solution *sans esclave* en posant :

$$\eta = \xi(t) w_0, \text{ où } w_0 \text{ est un mode propre instable.}$$

On obtient une équation différentielle non linéaire en ξ :

$$\ddot{\xi} + (\lambda_0 - U^2)\xi + \alpha \xi^2 + U\beta \xi \dot{\xi} + U^2 \gamma \xi^2 = 0, \alpha > 0, \gamma > 0.$$

La solution peut se représenter dans le plan des phases et conduit soit à un cycle limite (gauche), soit une instabilité (droite) ; $U > U_c$.



Retour vers le modèle de Kelvin Neumann

Au lieu d'éliminer φ on peut aussi éliminer η . La méthode est classique et consiste (voir J.J. Stoker) à prendre la dérivée convective de l'équation des vagues et celle de continuité cinématique. **Le modèle est équivalent** mais **totalemt instable si $\sigma = 0$** . On obtient ainsi le modèle de Kelvin-Neumann enrichi par la capillarité. Rappelons sa formulation lorsque $\sigma = 0$ car elle est très simple : Notons $D_t(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + \nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s(\cdot)$ l'opérateur de dérivation convective,

On l'applique à l'équation d'équilibre de la surface libre Γ_f :

$$[-\sigma \Delta_s + \rho g] D_t \eta = -[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho U \nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi].$$

D'où :

$$D_t \eta = -A [\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\rho U \nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho U^2 \nabla_s (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi)].$$

avec

$$A = [-\sigma \Delta_s + \rho g]^{-1} \text{ sur } H_0^1(\Gamma_f).$$

Lorsque $\sigma = 0$:

$$A = \frac{1}{\rho g} I_d.$$

Modèle de NK en φ

On élimine η dans l'équation de l'eau et on utilise une intégration par parties en s ($\varphi = 0$ sur $\partial\Gamma_f$) :

$$\begin{aligned} \forall \psi \in W_0, \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi &= \int_{\Gamma_f} D_T \eta \psi = \\ &- \varrho \int_{\Gamma_f} A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi \\ &- \varrho U \int_{\Gamma_f} [A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \psi - A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial t}] \\ &+ \varrho U^2 \int_{\Gamma_f} (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi); (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi). \end{aligned}$$

Le modèle de Neumann-Kelvin enrichi

Trouver $\varphi \in W_0$ telle que :

$$\forall \psi \in W_0, \quad \underbrace{\rho \int_{\Gamma_f} A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi}_{\text{terme d'inertie}} + \underbrace{\rho U \int_{\Gamma_f} [A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \psi - A(\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial t}]}_{\text{Coriolis}}$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi}_{\text{raideur fluide}} - \underbrace{\rho U^2 \int_{\Gamma_f} (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \varphi); (\nabla_s \Phi_0 \cdot \nabla_s \psi)}_{\text{retard de pression}} = 0.$$

Soit sous forme symbolique :

$$\forall \psi \in W_0, \quad \mathcal{M}(\ddot{\varphi}, \psi) + 2UC(\dot{\varphi}, \psi) + \mathcal{A}(\varphi, \psi) = 0.$$

On peut construire le modèle avec bateau. . .

La prise ne compte d'un bateau de surface avec tossage est possible. Mais les systèmes sont relativement découplés. Peut-être pour éviter cela (photos web d'un accident survenu en 1977) :



Merci de votre attention.