MVA010 – CNAM – IMATH

Corrigé du devoir n°2

Exercice 1

1. Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x + x^2}$ et cherchons son domaine de définition.

Pour que $f(x)$ soit défini, il faut :

- $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k étant une entier relatif quelconque (afin que *tanx* ait un sens)
- $x + x^2 = x(1+x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$ et $x \neq -1$

D'où il vient :

$$D_f = IR - \left(\{0;1\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathrm{Z} \right\} \right)$$

On peut prolonger cette fonction par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ puisque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x}\left(\dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$ car $\lim_{0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2. De même, pour que $g(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{\sqrt{x + x^2}}$ soit défini, il faut :

- $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k étant une entier relatif quelconque (afin que *tanx* ait un sens)
- $x + x^2 = x(1+x) > 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

D'où il vient :

$$D_g = (\,]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\,) - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathrm{Z} \right\}$$

On peut prolonger cette fonction par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ puisque $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (car par exemple, $\lim_{0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{0} \sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x} = 0 \times 1 = 0$. Et de même pour *tan*).

3. Les deux fonctions sont continues sur l'intervalle]3 ; 4[car cet intervalle est inclus dans leurs domaines de définition.

   En effet, on a:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < 3 \\ \pi + \dfrac{\pi}{2} > 4 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Domaine de définition de f : IR-{1/2}

2. f n'est ni paire ni impaire car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine.

3. f est continue et dérivable sur son domaine de définition car elle est constituée de fonctions continues et dérivable.

4. $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 1}{(2x-1)^2}$ s'annule en $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ et en $\beta = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$ α	$\frac{1}{2}$	β $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 -	‖	- 0 +
$f(x)$	$-\infty$ ↑ $f(\alpha)$ ↓ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↓ $f(\beta)$ ↑ $+\infty$

5.

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)+1}{2x-1} = x+1+\frac{1}{2x-1}$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $\pm\infty$, la courbe étant au-dessus de la droite en $+\infty$ et en-dessous en $-\infty$.

Par ailleurs, le tableau des variations montre que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est asymptote verticale.

7. On a l'équivalence:

$$y = x+1+\frac{1}{2x-1} \Leftrightarrow y-\frac{3}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

En prenant I comme origine, et en posant :

$$\begin{cases} X = x - \dfrac{1}{2} \\ Y = y - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

l'équation de la courbe dans ce nouveau repère devient :

$$Y = X + \frac{1}{2X}$$

La fonction correspondante est impaire, ce qui explique que le graphe de f présente I comme centre de symétrie.