École Siti, Dpt Imath, Case 2D500

Année universitaire 2013/2014
Examen session 1
Date: 5 février 2014

Sujet UE MVA101HT.
Sujet de 3 pages.
Responsable: T. Horsin
Calculatrices interdites.
Tous documents manuscrits autorisés.
Les téléphones mobiles et autres équipements communicants doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.
Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

Exercice 1.

Les séries suivantes sont-elles convergentes ? (Justifier votre réponse).

i. $u_n = \dfrac{1}{n - \dfrac{1}{2n}}$.
On a $u_n \geq \frac{1}{n}$ donc la série est divergente.

ii. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
On a $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc la série est convergente.

iii. $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - (-1)^n \dfrac{1}{n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})$ donc la série est convergente car somme d'une série absolument convergente et d'une série semi-convergente.

iv. $u_n = \dfrac{a^n}{n^n} n!$, pour $a > 0$, (on pourra utiliser la règle de D'Alembert et montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{an} = e^{-a} \quad).$$
On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a(n+1)\dfrac{(n)^n}{(n+1)^{n+1}} \to \dfrac{a}{e}$.
Donc si $a > e$ la série diverge, si $a < e$ la série converge et si $a = e$, on ne sait pas (en fait on peut quand même le savoir).

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour chacun des cas:

i. $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$.
Si n est impair $a_n = 0$. Si n est pair $a_n = \frac{2}{n}$. Le rayon est donc 1.

ii. $a_n = \frac{1}{n^{3n}}$. $R = +\infty$.

iii. $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impair,} \\ \left(\frac{4n+6}{n+2}\right)^n \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases}$ $R = 1/4$.

Exercice 3.

On considère f une fonction non identiquement nulle, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f''(x) + x(x+1)f'(x) - f(x) = 0.$$

On admet que f est développable en série entière.
Déterminer le développement en série entière de f, et donner son rayon de convergence.

On écrit pour $|x| < R$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où R est le rayon de convergence de la série entière considérée. Sur $]-R, R[$ on peut dériver deux fois la série terme à terme, chose non évidente a priori.
La relation sur f donne $\sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^n + x(x+1)\sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_0^{\infty} a_n x^n = 0$,
$\sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_1^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_1^{\infty} n a_n x^n - \sum_0^{\infty} a_n x^n = 0$.
On a donc $a_0 = 0$, $a_1 - a_1 = 0$ donc a_1 est quelconque *a priori*.
$2a_2 a_1 + a_1 + 2a_2 - a_2 = 0$ donc $3a_2 + a_1 = 0, \ldots,$
$(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1} + na_n = 0$, donc $((n+1)^2 - 1)a_{n+1} = -na_n$.
On a $a_{n+1} = -\frac{n}{n(n+2)}a_n = -\frac{1}{n+2}a_n$. Donc $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. Donc $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ donc le rayon de convergence de la série entière est infini.

Exercice 4.

Dans cet exercice la question i n'est pas utile pour les questions suivantes.
Soit A la matrice donnée par $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

i. Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.
3 et -2.

ii. On considère 2 fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall t \in [0, +\infty[, \begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -3x(t) - 3y(t), \\ x(0) = 1 \\ y(0) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

On note X et Y les transformées de Laplace de x et y. Déterminer le système d'équations vérifiées par X et Y.

$\begin{cases} pX(p) - 1 = 4X(p) + 2Y(p) \\ pY(p) + 1 = 3X(p) - 3Y(p) \end{cases}$

iii. Déterminer X et Y, et en déduire x et y.

On trouve $X(p) = \frac{a}{X-3} + \frac{b}{X+2}$ et $Y(p) = \frac{c}{X-3} + \frac{d}{X+2}$ où a, b, c, d sont à calculer.

On en déduit que $x(t) = ae^{3t} + be^{-2t}$ et $y(t) = ce^{3t} + de^{-2t}$.

Exercice 5.

Soit f la fonction paire et 2π périodique telle que $f(x) = x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et 0 sinon.

i. Déterminer la série de Fourier de f. On utilisera les (a_n) et les (b_n).

La fonction étant paire on a $b_n = 0$ pour tout n.

On a $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

De même $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)dx$, on le calcule en sachant qu'une primitive de $x\cos(nx)$ est de la forme $(ax+b)\cos(nx) + (cx+d)\sin(nx)$ qui par dérivation donne

$$\cos(nx)(a + nd + ncx) + \sin(nx)(-nax - nb + c).$$

Si on pose $a = 0 = d$, $c = 1/n$ et $b = 1/n^2$ cela convient.

Donc $a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi/2}$

ii. Ecrire la relation de Bessel-Parseval pour f.

....

iii. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément ? Si oui, la limite est-elle continue ?

La série de Fourier de f ne converge pas uniformément, sinon f serait continue.

iv. Quelle est la somme de la série de Fourier de f en $x = \frac{9\pi}{2}$?

C'est le théorème de Jordan-Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en $9\pi/2$, soit $\pi/4$.