name: dummy

file: cnam

state: unknown

Avril 2012, deuxième session d'examen. Durée: 3h
Tous documents autorisés, calculatrices interdites.
Le barême, donné à titre indicatif, pourra être modifié.

Exercice 1. (2 points)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes:

i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^3+n^2-1)x^n.$

ii. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-n}}{1+n^2}x^n.$

Exercice 2. (4 points)
On considère f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 f''(x) + x(x+1)f'(x) + f(x) = 0.$$

On admet que f est développable en série entière.

i. Déterminer le développement en série entière de f, et donner son rayon de convergence.

ii. Déterminer f à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 3. (6 points)
Dans cet exercice la question i n'est pas utile pour les questions suivantes.
Soit A la matrice donnée par $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

i. Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés. 2pt

ii. On considère 2 fonctions x et y dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2. \end{cases} \qquad (1)$$

On note X et Y les transformées de Laplace de x et y. Déterminer le système d'équations vérifiées par X et Y. 2pt

iii. Déterminer X et Y, et en déduire x et y. 3pt

`Exercice 4.` (5 points)

i. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2 - 1} \cos(2px).$$

ii. Soit f une fonction deux fois dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = |\cos(x)|.$$

Déterminer $S(f)$ son développement en série de Fourier. Une telle fonction est-elle unique ?

iii. Vérifier que $S(f)$ est bien une fonction deux fois dérivable.

`Exercice 5.` (6 points)

i. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

ii. Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_1 \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{ne^{u_n}}.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$. En déduire par récurrence que

$$\forall n \geq 3, \ \frac{1}{n} \geq u_{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{en}}.$$

2. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

iii. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En déduire la nature de la série de terme général

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right).$$