Suites et séries de fonctions.

1 Convergence simple:

Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une suite de fonctions. Cela signifie que pour tout $x \in I$, on considère la suite $(f_n(x))$.

Définition. *On dira que la suite (f_n) converge simplement sur I, si $\forall x \in I$, $(f_n(x))$ est une suite convergente. On note $f(x) := \lim f_n(x)$.*

Ceci définit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et on dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I.

Exemple: $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ est une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto e^x$.

1

Exemple: $g_n(x) = n * \max(0, \min(nx, 2 - nx))$. C'est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Exemple: $h_n(x) = \max(0, 1 - nx)$ est une suite de fonctions qui converge simplement.
Dans le dernier exemple, on voit que chaque h_n est continue alors que la fonction limite est la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 partout ailleurs.
Par ailleurs $\int_0^1 g_n(x)dx = 1$ ce qui prouve que l'intégrale de la limite diffère de la limite des intégrales.

Pour pallier la perte des propriétés des limites de suites de fonctions, on introduit une notion de convergence plus forte.

2 Convergence uniforme:

On dira que la suite de fonctions (f_n) converge converge uniformément vers f sur I, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N,\ \forall x \in I,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

On voit sur la définition précédente que l'écart entre f et f_n est petit pour n assez grand, indépendamment de $x \in I$.
Exemple:

La suite de fonctions $x \mapsto x^n$ converge sur $[0,1]$ vers la fonction qui vaut 0 sauf en 1 où elle vaut 1.
La convergence est uniforme sur tout intervalle $[0,\alpha]$ avec $0 \leq \alpha < 1$.
Elle n'est pas uniforme sur $[0,1]$. En effet on a $f_n(\sqrt[n]{(1/3)}) = 1/3$ qui ne tend ni vers 0, ni vers 1.
Exemple:
$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Elle converge simplement vers e^x.
La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car $f_n(n) - e^n$ ne tend pas vers 0.
La convergence est uniforme sur tout intervalle $[a,b]$ avec a et b finis.

En effet, fixons N tel que si $n > N$ alors $(1 + a/n) > 0$.
On a alors $\forall x \in [a,b]$,

$$n \ln(1 + a/n) - 1 < n \ln(1 + x/n) - 1 < n \ln(1 + b/n) - 1$$

ce qui permet de conclure (pourquoi ?).
La convergence uniforme permet de transmettre des propriétés aux limites.
Ainsi on a
Théorème. *Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur I alors f est continue sur I.*
En effet soit $x_0 \in I$, on a pour $x \in I$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

5

Par définition de la convergence uniforme, on peut choisir N tel que si $n > N$ alors $\forall x \in I$ on a $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, donc si $n > N$ le premier et le troisième terme sont $< \varepsilon$. Ce $n > N$ étant fixé, on peut choisir $|x - x_0|$ assez petit pour que le deuxième soit $< \varepsilon$ puisque f_n est continue. D'où le résultat.
Passons à l'intégrabilité.

□ Rappel ou complément.

On prend $I = [a,b]$.
Soit f bornée sur $[a,b]$. On appelle subdivision de I une suite $x_0 = a < x_1 < .. < x_N = b$ où N est un entier qui peut varier.
Le pas de la subdivision (x_i) se note $p := \max_{i=0}^{N-1} |x_{i+1} - x_i|$.

Puisque f est bornée sur $[a,b]$, les nombres

$$m_i := \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

et

$$M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

sont définis.

Déf. *On dira que f est intégrable au sens de Riemann si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une subdivision de $[a,b]$ telle que*

$$\sum_{i=0}^{N-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \le \varepsilon.$$

Si cela est possible, il n'est pas trop difficile de montrer que

$$\lim_{p\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} M_i(x_{i+1}-x_i) = \lim_{p\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$$

existe

On note cette limite

$$\int_a^b f(t)dt.$$

On dispose alors du

Théorème. *Si f_n est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et si $f_n \to f$ uniformément sur I alors f est intégrable au sens de Riemann et* $\int_a^b f_n(t)dx \to \int_a^b f(t)dt.$

3 Dérivabilité

Exemple: soit f_n la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

On a $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{2 + n^2}$.

Donc f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Chaque fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction $|\cdot|$ ne l'est pas.

La situation est clarifiée pour le résultat suivant:

Théorème. *Soit f_n une suite de fonctions dérivable sur un intervalle I, on suppose que f_n' est une fonction continue pour* *tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que* $\forall [a,b] \subset I$ f_n' *converge uniformément vers une fonction* g. *On suppose qu'il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $f_n(x_0)$ *soit une suite convergente. Alors il existe une fonction* f *dérivable sur* I *telle que* f_n *converge vers* f *uniformément sur tout* $[a,b] \subset I$ *et* $f' = g$.

Exemple: $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{e^{-kx}}{1+k^2}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. La limite est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exemple: soit f_n donnée par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{|x| - k}$. Sur tout intervalle de la forme $]k,k+1[$, f_n converge vers une fonction dérivable.

4 Application aux séries de fonctions

On envisage une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), f_n : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Les théorèmes que l'on a énoncés précédemment s'étendent à la situation des séries.

Quand a-t-on convergence uniforme de la série ?

□ Convergence normale

Déf. *On dit que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge normalement sur* I *si il existe une suite* (α_n) *telle que* $\sum \alpha_n$ *converge et telle que* $\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$.

La convergence normale implique la convergence uniforme. (Pourquoi ?)

La convergence uniforme n'est pas cependant équivalent à la convergence normale.

Exemple:

$\sum \frac{(-1)^n}{|x| + n}$ converge uniformément sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mais pas normalement.

5 Compléments

Ce complément nécessite théoriquement d'introduire l'intégrale de Lebesgue. Néanmoins, on peut énoncer deux théorèmes qui s'avèrent extrêmement utiles même dans le cas des fonctions plus ``classiques''.

Théorème de la convergence monotone. *Soit* $f_n : I \to \mathbb{R}^+$ *une suite de fonctions telles que* $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *si* $f_n \to f$ *simplement alors*

$$\int_I f_n(t)dt \to \int_I f(t)dt.$$

Théorème de la convergence dominée. *Soit* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions telles que* $f_n \to f$ *simplement et telle qu'il existe g telle que* $\forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq g(t)$ *et telle que* $\int_I g(t)dt < +\infty$ *alors*

$$\int_I |f_n(t) - f(t)|dt \to 0.$$

6 Cas des séries entières

Définition: On considère une suite (a_n) de nombres réels ou complexes. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On dispose du résultat suivant:

Théorème. *On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors pour tout $\rho \in [0, r[$ la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur $\{x, |x| \leq \rho\}$.*

En effet: on a $|a_n|\rho^N = |a_n| r^N . \left(\frac{\rho}{r}\right)^N \leq M \left(\frac{\rho}{r}\right)^N$.

On a donc convergence normale d'où le résultat.

Déf. *On considère $\{r,$ tel que $|a_n| r^n,$ est une suite bornée.$\}$. Cet ensemble est non vide. Si il est majoré, il possède une borne supérieure R qu'on appelle rayon de convergence de* *la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, si il n'est pas majoré, on dit que* $R = +\infty$.

Comment détermine-t-on le rayon de convergence ?

Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existe (dans $[0, +\infty]$) alors $R = \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

En effet pour $0 < \rho < R$ on $\lim \sqrt[n]{|a_n|\rho^n} = 0$. La règle de Cauchy permet de conclure.

Cette formule ne permet pas cependant de conclure dans toutes les situations.

Par exemple:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

On a $a_n = 0$ si n est impair. La limite donnée précédemment ne donne rien. Néamoins $R = 1$.

- Série entière dérivée.

Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

une série entière. La série entière dérivée est

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Théorème. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence*

Soit R le rayon de convergence de la série initiale.

- Supposons d'abord $R > 0$.

Soit $r \in [0,R[$ et $r_2 \in]r,R[$. On a

$$(n+1)a_{n+1}r^n = (n+1)a_{n+1}{r_2}^{n+1}(\frac{r}{r_2})^{n+1}\frac{1}{r}.$$

La suite $a_{n+1}{r_2}^{n+1}$ tend vers 0 par hypothèse, $(n+1)(\frac{r}{r_2})^{n+1}$ également. Donc le rayon de convergence de la série dérivée est $\geq$ à celui de la série initiale.

De plus il est clair que celui de la série dérivée est $\leq$ à celui de la série initiale (pourquoi ?), donc ils sont égaux.

□ Supposons maintenant $R = 0$. Notons R' celui de la série dérivée. Si $R' > 0$ alors $R = 0$ (pourquoi ?). Donc $R' = R = 0$.

Ce résultat a pour conséquence

Théorème. *Si la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ alors sur $\{x, |x| < R\}$ la somme est infiniment dérivable.*

En effet, il suffit de réitérer le résultat précédent et le résultat de convergence uniforme.

6.1 Fonctions développables en série entières

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset \mathcal{D}_f$.

Déf. *On dit que f est DSE en x_0 si il existe $R > 0$ tel qu'il existe une suite a_n telle que si $|x - x_0| < R$ alors*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Si un tel développement existe f est infiniment dérivable au voisinage de x_0. De plus, la suite (a_n) est unique car $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Exemples: pour $|x| < 1$, on a

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

En effet pour $|x| < 1$ on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On peut définir $\cos(x)$ et $\sin(x)$ par $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

et

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et on vérifie que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}.$$

7 Extension aux plan complexe.

7.1 Ouvert de $\mathbb{C}$

Soit $\omega \subset \mathbb{C}$.

Déf. *On dit que ω est un ouvert, si $\forall z \in \omega$ il existe $r > 0$ tel que si $|z' - z| < r$ alors $z' \in \omega$.*

7.2 Fonctions analytiques.

Soit $f : \omega \to \mathbb{C}$.

Déf. *On dit que f est analytique sur ω, si $\forall z_0 \in \omega$, il existe une suite (a_n) et un nombre $r > 0$ tel que $\forall z \in \omega$*

$$|z - z_0| < r \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Exemple:

Théorème. *(difficile). Soit $f : \omega \to \mathbb{C}$ alors $\forall z_0 \in \omega$*

$$\lim_{z \to z_0, h \in \mathbb{C}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe ssi f est analytique sur ω.

En particulier la fonction

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est analytique sur $\mathbb{C}$. En effet, d'après la théorie des séries entières, on peut la dériver terme à terme, partout sur $\mathbb{C}$.

Une des propriétés fondamentales de ces fonctions est la suivante:
Soit $T \subset \omega$ dont le bord est un triangle. ∂T désigne le bord. On écrit $\partial T := [A,B] \cup [B,C| \cup [C,A]$. On parcourt ∂T de façon à laisser à sa gauche son intérieur. Ceci donne une manière de parcourir $[A,B]$, par exemple $z = z_A + t(z_B - z_A)$ où z_A et z_B désigne les affixes de A et B.
On pose alors

$$\int_{[A,B]} f(z)dz := \int_0^1 f(z_A + t(z_B - z_A)).(z_B - z_A)dt.$$

On peut vérifier (facilement) que cette définition ne dépend pas de la manière d'aller de A à B.

On a alors

Théorème. *(de Cauchy). Sous ces hypothèses sur f et T,*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Ce résultat fondamental est la base des intégrales complexes. Cela permet en particulier de calculer des transformées de Fourier.