Lois usuelles de probabilités

Dans ce chapitre nous passons en revue certaines des lois connues, discrètes ou continues, nous explicitons certaines de leurs caractéristiques telles que la moyenne et la variance. Nous donnons aussi les courbes représentatives des densités et des fonctions de répartitions.

1 Lois discrètes

1.1 Loi uniforme

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète si elle prend ses valeurs dans l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et que la probabilité $P(X = x_i) = p_i = \frac{1}{n}$. Dans ce cas, on dit que les événements $X = x_i$ sont équiprobables.

- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Cas particulier
Si $x_i = i$, $E(X) = \frac{n+1}{2}$, $E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$, $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

1.2 Loi de Bernoulli B(1,p)

On considère une épreuve aléatoire et un événement A lié à cette épreuve tel que $P(A) = p$. On effectue une fois cette épreuve et on désigne par X le nombre de réalisation de A. X est donc la variable aléatoire définie par

$$\begin{cases} X = 1 \text{ si } A \text{ est réalisé} \\ X = 0 \text{ si } A \text{ n'est pas réalisé,} \end{cases}$$

avec

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p.$$

Dans ce cas
- $E(X) = p$
- $E(X^2) = p$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1 - p)$

1.3 Loi binomiale B(n,p)

On répète n fois dans des conditions identiques l'épreuve de Bernoulli (expérience aléatoire à deux issues). La probabilité de voir se réaliser A est p. Soit X le nombre d'obtention de l'événement A au cours des n épreuves. La variable X prend les valeurs $0, 1, 2, 3...., n$. il est clair que X peut être regardé comme la somme de n variables indépendantes de Bernoulli X_i de même paramètre p, soit

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

On définit donc

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} .$$

Dans ce cas

- $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = np$
- $E(X^2) = E((X_1 + X_2 + ... + X_n)^2) = n(n-1)p^2 + np$ (à démontrer)
- $V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) = np(1-p)$

Exemple
Deux variétés de primevères diffèrent par la forme de leurs feuilles. La variété présentant le gène dominant F a une feuille entière et la variété présentant le gène récessif f a une feuille découpée. On croise deux primevères hétérozygotes Ff. Le résultat du croisement, d'après le tableau des génotypes, est le suivant :

	F	f
F	FF	Ff
f	Ff	ff

Seul l'homozygote ff présente une feuille découpée, les autres génotypes présentant une feuille entière. Quelle est la probabilité d'avoir k plants à feuilles découpées sur n graines résultant du croisement précédent ? Dans cet exemple l'épreuve est un croisement, ou bien le tirage d'une graine résultant du croisement. Les deux événement reliés à l'épreuve sont l'apparition d'une primevère à feuille découpée ou d'une primevère à feuille lisse. La probabilité du premier événement est $p = 1/4$ et la probabilité du second événement est $q = 1 - p = 3/4$. Si les hypothèses génétiques sont exactes, la probabilité d'avoir k plants à feuille découpées sur n graines est donnée par la loi binomiale.

1.4 loi multinomiale $M(n, p_1, p_2, ..., p_j)$

C'est une généralisation de la loi binomiale, au lieu de s'appliquer à deux événements complémentaires de probabilité p et q, elle s'applique à j événements "complémentaires" de probabilité $p_1, p_2, ..., p_j$ vérifiant :

$$p_1 + p_2 + ... + p_j = 1.$$

La loi multinomiale donne donc la probabilité de voir apparaître :

- n_1 l'événement de probabilité p_1
- n_2 l'événement de probabilité p_2
- .
- n_j l'événement de probabilité p_j

Cette probabilité est égale à :

$$P(n_1, n_2, ..., n_j) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_j!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_j^{n_j}$$

Exemple
Le croisement de deux phénotypes de pois donne naissance à quatre type de pois

- *Type 1* pois rond et jaunes
- *Type 2* pois rond et vert
- *Type 3* pois ridés et jaunes
- *Type 4* pois ridés et verts.

Une étude portant sur 2000 croisements a permis d'établir la probabilité d'apparition de chaque type de pois :

- *Type 1* $p_1 = 0.56$
- *Type 2* $p_2 = 0.19$
- *Type 3* $p_3 = 0.19$
- *Type 4* $p_4 = 0.06$

Si on prélève un échantillon de 16 pois d'une urne qui en contient une grande quantité, quelle est la probabilité d'obtenir 9 pois du *Type 1*, 3 du *Type 2*, 3 du *Type 3* et 1 du *Type 4* ?

$$P(16; 9, 3, 3, 1) = \frac{16!}{9!3!3!1!} 0.56^9 \times 0.19^3 \times 0.19^3 \times 0.06^1 = 0.0244.$$

1.5 Loi de Poisson de paramètre λ

Pour modéliser des phénomènes rares (décompte de bactéries pendant un certain temps, nombre d'erreurs typographiques dans un livre, nombre d'accident d'avion, nombre d'appel téléphoniques pendant un intervalle de temps, nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, nombre de suicides par an dans un pays donné...), on utilise la loi de Poisson (de paramètre $\lambda > 0$) définie par

$$\forall k \in N \qquad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} exp(-\lambda), \qquad \lambda > 0.$$

Deux applications type concernent en médecine la pharmacovigilance, et en biologie le titrage des solutions bactériennes. L'objet de la pharmacovigilance est de détecter les effets adverses des médicaments. La loi de Poisson permet d'estimer à partir des très rares cas signalés aux centres de pharmacovigilance *la fréquence des événements adverses*. Surtout elle permet de donner une limite supérieure au risque d'incident lorsqu'on n'a observé aucun événement adverse. En Bactéorologie, lorsqu'on veut titrer une suspension, on ensemence des *boites de Petri* avec une quantité fixée de la suspension de titre inconnu t (t est le nombre moyen de bactéries par ml). En faisant ainsi, les différentes boites reçoivent *en moyenne* t bactéries, mais chacune en reçoit un nombre différent aléatoire. On montre que ce nombre suit une loi de Poisson.

Nous avons donc :

- $E(X) = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Exemple
L'observation microscopique de plaquettes contenant des quantités égales d'une solution a permis de dresser le tableau suivant : Comparer cette distribution expérimentale à celle déduite de la loi de Poisson

k=nombre de bactéries	n=nombre de plaquettes
0	74
1	22
2	4

de même valeur moyenne, applicable dans le cas d'une solution homogène. (On donne exp(-0.3)). La valeur moyenne du nombre de bactéries par plaquette est :

$$\lambda = \frac{0 \times 74 + 1 \times \ 22 + 2 \times 4}{100} = \frac{30}{100} = 0.3$$

Si l'on suppose que la variable aléatoire $X = nombre\, de\, bactries\, par\, plaquette$ suit une loi de Poisson de paramètre $m = \lambda$ alors :

- $n(0) = 100 \times P(X = 0) = 100 \times exp(-0.3) = 74$ plaquettes,
- $n(1) = 100 \times P(X = 1) = 100 \times 0.3 \times exp(-0.3) = 22.2$ plaquettes,
- $n(2) = 100 \times P(X = 2) = 100 \times \frac{0.3^2}{2!} \times exp(-0.3) = 3.3$ plaquettes.

Complément :

- **Processus de Poisson**
  On suppose qu'un seul événement arrive à la fois, que le nombre n d'événements se produisant pendant une période T ne dépend que de la durée de cette période et que les événements sont indépendants. Soit N la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre d'événements se produisant.
  Soit $E(N) = cT$ où c est la cadence. Si le nombre moyen d'"événements par unité du temps est c, on démontre que la probabilité d'obtenir n événements pendant un temps T est :

$$P(N = n) = exp(-cT)\frac{(cT)^n}{n!}.$$

- **Approximation de la loi binomiale** $B(n, p)$
  Si $p < 0.1$, n>50 la loi binomiale B(n, p) peut être assimilée à la loi de Poisson P(m) où m = np.
- Si X et Y sont deux variables de Poisson indépendantes de paramètres λ et μ, la variable $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

1.6 Loi hypergéométrique $H(N, n, p)$

Soit une population de N individus parmi lesquels une proportion p (donc Np individus) possède un caractère. Il s'agit par exemple de la proportion des individus qui souffrent d'une certaine maladie, ou de la proportion des pièces défectueuse dans un grand lot de fabrication. On prélève un échantillon de n individus parmi cette population (le tirage pouvant s'effectuer d'un seul coup ou au fur et à mesure mais sans remise). On note X la variable aléatoire d'individus de l'échantillon possédant la propriété envisagée. Dans ce cas X suit une loi dite *hypergomtrique* et l'on a :

$$P(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}$$

avec

- $minX = max(0; n - N(1 - p))$;
- $maxX = min(n; Np)$;
- C_N^n = nombre d'échantillons possibles
- C_{Np}^k = nombre de groupe de k individus possédant la propriété ;
- C_{N-Np}^{n-k} = nombre de groupes de $(n - k)$ individus ne possédant pas la propriété.

La différence entre la loi binômiale classique et la loi hypergéométrique est que le tirage des éléments se fait avec remise dans la population pour la loi binômiale et sans remise dans la population pour la loi hypergéométrique. Cette loi est souvent utilisée dans la théorie des sondages.

Pour cette loi, nous avons
- $E(X) = np$
- $V(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$

Exemple
Une colonie d'hirondelles de rivage(Riparia Riparia), appelées hirondelles des sables, s'est installée dans une falaise de sable qui comporte 40 galéries conduisant à un nid occupé. Sur les 80 adultes de la colonie, 40 ont déja été bagués lors d'opérations antérieures. Si l'on capture 12 hirondelles adultes de la colonie, déterminer la distribution de probabilité du nombre d'individus bagués.
La distribution de probabilité obéit à une loi hypergéométrique de paramètres $N = 80$, $n = 12$, et $p = 0.5$.

1.7 Loi binomiale négative (loi de Pascal)

La loi binomiale négative permet de déterminer la probabilité d'être obligé d'effectuer k expériences identiques et indépendantes pour obtenir r fois l'événement de probabilité p. Cette loi est définie par :

$$P(X = k) = \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}p^r(1-p)^{k-r}, r \geq 1.$$

Cette loi est un modèle mathématique qui s'ajuste très bien à des données provenant de phénomènes ayant un caractère contagieux.
Pour cette loi, nous avons :
- $E(X) = \frac{r}{p}$
- $V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Exemple
En supposant que la probabilité de capture d'une souris sylvestre pleine s'élève à 0.20. Déterminer la probabilité qu'il soit nécessaire de capturer 8 souris sylvestre Peromyscus maniculatis afin d'en obtenir deux pleines ?
Cette probabilité s'obtient en posant $P(X = 8)$, $r = 2$ et $p = 0.2$.

1.8 Loi géométrique

C'est la loi du nombre d'essais(ou d'épreuves) nécessaires pour faire apparaître un événement de probabilité p. C'est le cas de nombre d'examens necessaires pour réussir une épreuve en supposant que la probabilité de réussir à chaque passage de l'examen est de p et que les résultats sont indépendants d'un examen à un autre. Soit donc X le nombre d'essais avant d'obtenir le premier *succès*. La loi de X est donnée par :

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, ..., n, ..., \infty$$

Pour cette loi, nous avons :
- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$

Exemple
La probabilité de réussir l'examen de statistique est de 0.75. Un candidat a décidé de passer cet examen autant de fois jusqu'à son obtension. Quelle est la probabilité qu'il l'obtienne au 4 ème passage ?
Il s'agit donc de calculer

$$P(X = 4) = 0.75 \times 0.25^3 = 0.0117.$$

2 Variables continues

Chaque fois qu'une mesure continue (la plupart des dosages le sont) est variable d'un sujet à l'autre, les techniques enseignées dans cette partie permettront de représenter cette variabilité. Dans cette section on suppose que pour chaque variable X, il existe une fonction f positive et bornée sur R telle que $F(x) = \int_{\infty}^{x} f(t)dt$. Cette fonction est la densité de la variable X.

2.1 Loi uniforme $U[a, b]$

Pour $(a, b) \in R^2$ vérifiant $a < b$, la loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi qui admet la densité de probabilité suivante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le fait que f soit constante sur $[a, b]$ correspond au fait que si on choisit un point selon cette loi, on a "autant de chance" de tomber au voisinage de chaque point de l'intervalle $[a, b]$, ce qui explique le nom *uniforme.*
En utilisant le chapitre précédent, nous rappelons que

- $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a < x \leq b \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$
- $E(X) = \frac{b+a}{2}$
- $\sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

2.2 Loi exponentielle $E(\lambda, \lambda > 0)$

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, est la loi qui admet la densité suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \lambda exp(-\lambda x), & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons un équipement qui a une probabilité λ par unité de temps de tomber en panne, λ est supposée constante et indépendante de son âge. Sous cette condition, la loi du nombre de pannes dans un certain intervalle suit une loi de Poisson. Si l'on s'intéresse au *moment où survient la panne* et l'on note X la variable *date de la panne*, X prend ses valeurs dans R^+ et suit une loi exponentielle de paramètreλ.
Sa fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a, \\ \int_{\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt = 1 - exp(-\lambda x), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

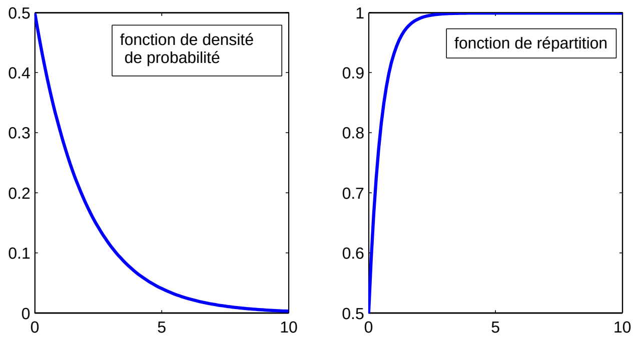

FIG. 1 – Représentation de la loi exponentielle.

Notons que la loi exponentielle jouit aussi d'une propriété importante pour les applications, propriétés de non vieillissement, c'est à dire : soit X une variable aléatoire positive, telle que $P(X > s) > 0$ pour tout $s \in R$. On a

$$P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s)$$

pour tous s et t si et seulement si X suit une loi exponentielle. Pour la loi exponentielle de paramètre λ, on démontre que

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

2.3 Loi normale $N(m, \sigma^2)$

La loi normale (nom donné par *Pearson* en 1893) ou de *Laplace-Gauss* est la loi de certains phénomènes continus qui fluctuent autour d'une valeur moyenne m , de manière aléatoire, résultante d'un grand nombre de causes algébriquement additives et indépendantes. La dispersion des valeurs observées d'un même caractère gaussien est représentée par un écart type σ.

La distribution Normale, dite aussi de Laplace-Gauss ou gaussienne, est centrale en statistique. Plusieurs raisons y concourent :

- c'est une bonne, voire très bonne, approximation à de nombreuses lois, toute une série de théorèmes central limite en donne des illustrations. Si par exemple on suppose qu'une erreur est la somme d'un grand nombre de composantes infinitésimales ayant les trois propriétés

  1. d'être de même ordre de grandeur,
  2. d'être indépendantes, et
  3. d'avoir la même probabilité d'être positive ou négative,

  alors l'erreur globale est une Normale centrée (de moyenne 0).

- c'est une loi qui ne dépend que de deux paramètres : espérance (μ) et écart-type ($\sigma \leq 0$) qui s'interprètent naturellement comme paramètres de position (μ) et d'échelle (σ). Ils s'expriment dans les mêmes unités que la variable aléatoire. De manière très classique, on note X suit une

$N(\mu, \sigma)$ ou X suit $N(\mu, \sigma^2)$ pour indiquer qu'une variable aléatoire X suit une distribution normale d'espérance μ et d'écart-type σ. L'utilisation de la variance comme second paramètre est sans doute plus ancienne.

– alors que le calcul automatique n'existait pas, de nombreuses tables de ses distributions (directe ou dérivées) ont été vulgarisées.

Définition
Une variable aléatoire X suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$ si X admet la densité

$$\forall x \in R, f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)$$

En effectuant le changement de variable

$$t = \frac{x-m}{\sigma}$$

on définit une nouvelle densité de probabilité appelée *loi normale centrée réduite* que l'on note encore $N(0, 1)$:

$$\forall x \in R, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}x^2)$$

remarques

– Assez généralement, toute variable aléatoire continue dont on peut admettre qu'elle est unimodale et pas trop dissymétrique peut être approchée par une distribution Normale.
– Le support de la distribution normale est de moins l'infini à plus l'infini. On pourrait en déduire qu'elle n'est donc pas adaptée pour représenter une variable aléatoire strictement positive comme le poids d'un individu, où le nombre de feuilles d'un arbre. En fait cette objection logique ne tient pas à l'examen des probabilités ; par exemple si X $N(\mu = 175, \sigma = 10)$, la probabilité que X soit inférieur à 100 vaut 3.2×10^{-14}!

Représentation
La fonction densité de probabilité de la loi normale centrée réduite est paire car $f(x) = f(-x)$. Cela signifie que sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des des ordonnées. Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle pour x allant de 0 à l'infini. La fonction de répartition $\phi(x)$ de X est définie par

$$\phi(x) = P(X \leq x) = \int_{\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{t^2}{2})dt.$$

Vu que la densité de probabilité f est paire et que $\phi(+\infty) = 1$ et que $\phi(0) = 1/2$, on a :

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

Applications

– **Approximation de la loi binomiale** $B(n, p)$
Soit la variable aléatoire S_n désignant le nombre de *succès* d'un événement se réalisant avec une probabilité p au cours de n épreuves successives et indépendantes. S_n suit une loi binomiale de moyenne np et de variance $np(1-p)$. On peut démontrer que si n tend vers l'infini, la variable

$$Y = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

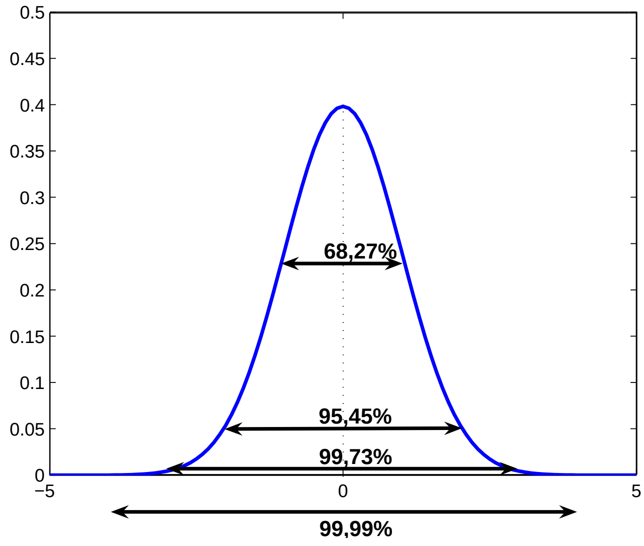

FIG. 2 – Représentation de la loi gaussienne.

tend vers la loi normale centrée et réduite $N(0,1)$. En pratique, cette approximation est possible dés que $np(1-p) > 18$. L'erreur d'approximation est pratiquement négligeable et ce d'autant plus que n est plus grand et p plus voisin de 0.5.

- **Approximation de la loi de Poisson** $P(\lambda)$
  Si $\lambda > 18$, la loi de Poisson $P(m)$ peut être assimilée à une loi normale $N(m,\sigma)$ où $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$.
- **Le théorème limite central**
  Soient n variables aléatoires X_i mutuellement indépendantes ayant même loi de probabilité d'espérance mathématiqueμ et de variance σ^2. Alors

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathsf{n}\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x) = \phi(x).$$

Ainsi, si on effectue n épreuves indépendantes d'une expérience en mesurant une propriété X, alors la variable aléatoire

$$\bar{X} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

où μ et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de X, converge vers la loi normale centrée, réduite.
Ce théorème est très général, car il dit que, quelle que soit la loi suivie par la propriété considérée, pourvu qu'elle ait une moyenne μ et un écart-type σ, la moyenne des n valeurs de la propriété en question, mesurées lors des n épreuves indépendantes peut être considérée comme suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ pourvu que n soit assez grand (généralement à partir de n >30).

2.4 Loi du Khi-deux $\chi^2(k)$

C'est la loi d'une variable aléatoire continue $\chi^2(k)$, somme de carrés de k variables normales centrées réduites indépendantes U_i,

$$\chi^2(k) = \sum_{i=1}^{k} U_i^2, \ 0 \leq \chi^2(k) < \infty.$$

Le paramètre k est un entier positif, c'est le *degré de liberté*.
Pour $k \in N$, soit $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} exp(-x)dx$, la densité de probabilité de la loi du χ^2 est donnée par l'équation suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} exp(-\frac{x}{2}), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

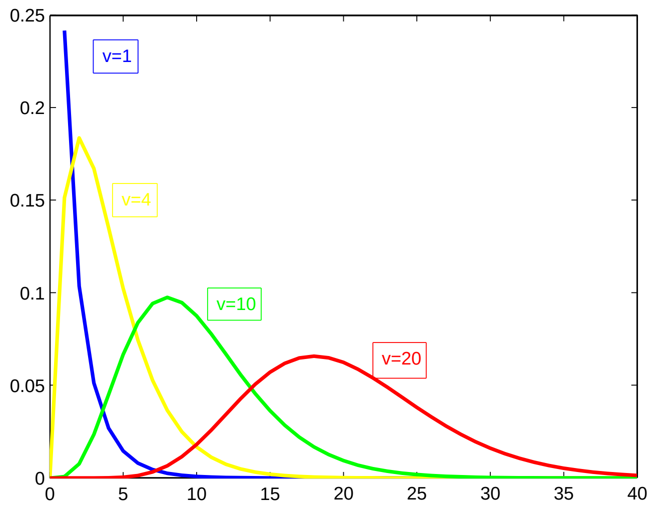

FIG. 3 – Représentation de la loi du chi2.

Remarques

1. Rappelons que la loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ est la loi de probabilité avec la densité

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{(\alpha-1)} exp(-\lambda x), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

La loi du Khi-deux avec k degrés de liberté est donc tout simplement la loi de $\Gamma(\alpha, \lambda)$, avec $\alpha = k/2$ et $\lambda = 1/2$:

$$\chi^2(k) = \Gamma(k/2, 1/2).$$

Notre expérience avec la loi Γ nous permet donc de déduire les propriétés suivantes :
– $\chi^2(2) =$ *Exponentielle*$(1/2)$;

- $E(\chi^2(k)) = k$;
- $V(\chi^2(k)) = 2k$;
- si U et V sont des variables aléatoires indépendantes et si U suit une loi $\chi^2(k)$ et une V une loi $\chi^2(l)$ alors $U + V$ soit une loi $\chi^2(k + l)$;
- si $k > 2$, la densité de la loi $\chi^2(k)$ est en forme de cloche asymétrique étirée vers la droite

2. Puisque $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, la densité de la loi du $Khi - deux$ avec 1 degré de liberté peut s'écrire sous la forme suivante :
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} exp(-x/2), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Application
Dans le cas d'un échantillon de k observations indépendantes d'une grandeur X qui suit une loi normale $N(m, \sigma)$
$$\sum_{i=1}^{k} (\frac{X_i - m}{\sigma})^2$$
suit une loi de χ^2 à k degrés de liberté. Si la moyenne m est inconnue et remplacée par la moyenne empirique $\bar{X}$
$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \mathsf{X}}{\sigma})^2$$
est distribué suivant une loi du χ^2 ayant pour paramètre $k = n - 1$.

2.5 Loi de Student $T(k)$

C'est la loi de la variable aléatoire continue $T(k)$ définie de la façon suivante où X est une variable $N(0, 1)$ et U un $\chi^2(k)$
$$T(k) = \frac{X}{\sqrt{\frac{U}{k}}}$$
Sa densité est définie par :
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma((k + 1)/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{(1 + (t^2/k))^{(k+1)/2}}.$$
Le paramètre k est un entier positif. C'est le nombre de degrés de liberté.

Application

C'est, en particulier, pour un échantillon de n observations indépendantes $X_1, X_2, ..., X_n$; d'une grandeur X, qui suit une loi normale $N(m, \sigma)$. La variable
$$T(k) = \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{où } k = n - 1 \qquad \text{et } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$
suit une distribution de Student à k degrès de liberté.

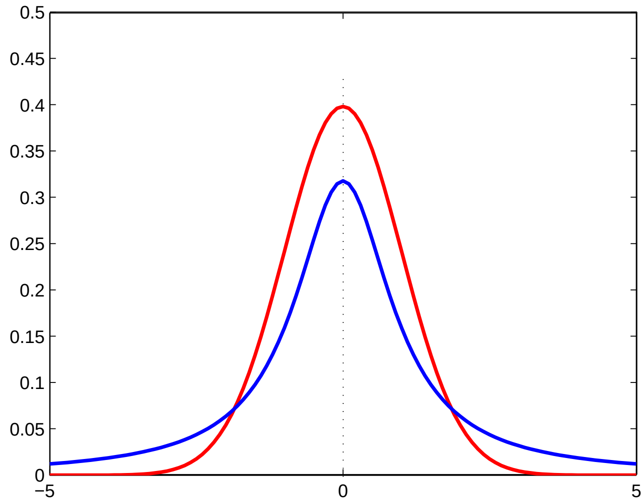

FIG. 4 – Représentation de la loi de Student.

Propriétés élémentaires

- La densité de la loi $T(k)$ est symétrique, centrée en 0 et en forme de cloche.
- $E(T(k)) = 0$, pourvu que $k >1$. Si $k = 1$, $E(T(k)) = \infty$ et dans ce cas on dit que l'espérance de T n'existe pas.
- $V(T(k)) = \begin{cases} \frac{k}{k-2}, & \text{si } k > 2, \\ \infty, & \text{si } k \leq 2. \end{cases}$
- Lorsque k est grand, $T(k)$ peut être approximée par une variable Z de loi $N(0,1)$. Plus précisément,
$$\lim_{k \to \infty} P(a < T(k) \leq b) = P(a < Z \leq b).$$

2.6 Loi de Fisher $F(k_1, k_2)$

C'est la loi d'une variable aléatoire continue F, avec k_1 et k_2 degrés de liberté, définie comme étant le rapport de deux variables χ^2 indépendantes, chacune étant divisée par son nombre de degrés de liberté

$$F(k_1, k_2) = \frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}, 0 \leq F \leq \infty.$$

Sa densité de probabilité, qui dépend des deux paramètres k_1 et k_2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma((k_1+k_2)/2)(k_1/k_2)^{k_1/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)} \frac{x^{(k_1/2)-1}}{(1+k_1x/k_2)^{(k_1+k_2)/2}}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Application

C'est, en particulier, pour deux échantillons indépendants de n_1 et n_2 observations indépendantes provenant de lois normales de même variance, la loi de la fonction des observations

$$F(k_1, k_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{où} \quad k_1 = n_1 - 1, k_2 = n_2 - 1;$$

$$S_1^2 = \frac{\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n_1 - 1} \text{ et } S_2^2 = \frac{\sum(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n_2 - 1}$$

Propriétés élémentaires

- Si $k_1 > 2$, la densité de la loi $F(k_1, k_2)$ est en forme de cloche asymétrique (étirés vers la droite).
- $Mo(X) = \frac{k_2(k_1-2)}{k_1(k_2+2)}$
- $E(X) = \begin{cases} \frac{k_2}{k_2-2}, & \text{si } k_2 \geq 3, \\ \infty, & \text{si } k_2 \leq 2. \end{cases}$
- $V(X) = \begin{cases} \frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}, & \text{si } k_2 \geq 5, \\ \infty, & \text{si } k_2 \leq 4. \end{cases}$
- Si R est $F(k_1, k_2)$, alors $W = 1/R$ est $F(k_2, k_1)$