

# Quelques aspects de la modélisation en mécanique

Philippe Destuynder

**Mots-clés :** Modélisation, Equations aux dérivées partielles, Approximation, Optimisation

**Résumé :** Les phénomènes de la physique obéissent à des lois et à des principes. Les lois sont souvent des relations différentielles entre les grandeurs intensives et extensives alors que les principes traduisent des conservations portant sur des grandeurs intensives et donc non soumises au phénomène d'échelle. La formulation des principes fait intervenir des équations aux dérivées partielles. L'ensemble des lois et des principes constitue le modèle. Sa complexité est telle, qu'il est en général nécessaire de simplifier les équations obtenues pour permettre leur approximation et leur résolution. Nous donnerons quelques exemples en mécanique de cette démarche qui peut aller jusqu'à la résolution sur ordinateur et qui constitue le calcul scientifique.

## Introduction

Le rêve de tout scientifique est de comprendre et de deviner les réactions de la nature qui l'entoure. Pour cela, depuis l'antiquité, les hommes de sciences ont formulé des lois reliant des grandeurs observables à d'autres qui le sont moins, mais dont les effets se font sentir intuitivement. Par exemple, l'allongement d'une corde (qui est observable) est manifestement relié aux efforts que l'on exerce dessus (non directement visibles) et évalués par comparaison à partir des effets qu'ils produisent. En l'occurrence, dans l'exemple cité, il s'agit de l'allongement de la corde. La première grandeur est extensive (une corde deux fois plus longue que la première et soumise au même effort, aura un allongement double). La seconde est intensive et ne bénéficie pas des effets d'échelle. Elle est plus cachée et ne peut pas être décelée sans faire appel à un équilibre, une comparaison. On admet que les causes (ici les efforts) qui produisent les mêmes effets (ici l'allongement) sur un même corps (ici la même corde), sont égaux. On vient de formuler un principe de conservation : celui des puissances virtuelles que les mécaniciens ont mis plusieurs millénaires à formuler dans un cadre mathématiquement correct. La loi qui relie les efforts à l'allongement n'est pas unique suivant l'importance des efforts qui sont appliqués et bien entendu, le matériau utilisé. On admet par exemple, que pour de petits allongements, les efforts seront proportionnels à ces derniers. En outre, ils sont réversibles, c'est à dire que si les efforts diminuent, il en est de même de l'allongement et ceci sans perte d'énergie. C'est le cadre de *l'élasticité linéaire*. Mais en y regardant de plus près, la corde est constituée de filins enroulés de façon hélicoïdale et collés entre eux. Si l'allongement devient trop important, les joints de colle vont se détériorer et permettre un glissement des filins les uns par rapport aux autres. Si bien qu'une fois les efforts supprimés, il restera un allongement remanant de la corde. Cependant, une fois déchargée,

elle présentera sous l'effet de petits efforts, le même comportement élastique que lorsqu'elle était neuve : elle sera simplement un peu plus longue. On entre alors dans un domaine appelé *la plasticité* et qui présente un caractère non linéaire (c'est à dire non proportionnel) de la loi reliant les efforts aux allongements. Si on augmente encore les efforts, les brins commenceront à s'effiloche, puis à se rompre, créant une détérioration définitive que l'on appelle *l'endommagement*.

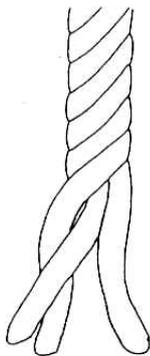


Traction de corde

Ici encore on aborde un domaine de lois de comportement non linéaires. La corde endommagée n'aura plus la même loi de proportionnalité entre efforts et allongements et ceci même si on l'utilise dans un contexte de petites élongations. Les alpinistes connaissent bien ces phénomènes qui les conduisent à rebuter une corde qui a encaissé un choc. L'étude de cet exemple, apparemment simple, montre la démarche de la modélisation physique qui permet de comprendre et de deviner le comportement de cette corde.

Tout d'abord, la nature dans laquelle nous vivons est tridimensionnelle. Chaque point de la corde peut se déplacer dans les trois directions d'espace. Mais manifestement, celle qui est dans le sens de la corde est plus importante que les autres dans le cas d'une traction

longitudinale. Cette remarque intuitive est guidée par le rapport des dimensions longitudinales et transversales. On voit apparaître un petit paramètre (rapports des dimensions) qui, une fois mis en évidence dans une formulation tridimensionnelle des équations de la mécanique, permet d'envisager des simplifications au niveau de la cinématique de description du mouvement de la corde. Le comportement mécanique des filins est très complexe et il ne semble pas nécessaire de tout représenter (les filins, les joints de colle...) pour proposer une représentation fiable de l'allongement de la corde. Ce comportement, dit "microscopique", est certes important pour bien comprendre l'apparition d'une rupture de colle ou de filins, mais on peut avantageusement le remplacer par un comportement "macroscopique" équivalent et plus simple à manipuler. Il en est de même pour des efforts plus importants lorsqu'on entre dans le domaine de la plasticité ou encore de l'endommagement. C'est alors la *théorie de l'homogénéisation* qui est utilisée. Cette dernière a connu un succès considérable avec le développement des matériaux composites, notamment dans l'aéronautique. On pourra également remarquer que si les mouvements de la corde devenaient plus amples, il conviendrait de prendre en compte des modifications significatives de la géométrie initiale ce qui rend le problème géométriquement non linéaire et par conséquent beaucoup plus difficile. Il se peut également que des vibrations viennent compliquer l'ensemble (cables de téléphérique par exemple), sans parler de problème de contact avec un autre corps, une roche par exemple et l'interaction avec un fluide environnant (cable de remorquage d'un navire...). Mais arrêtons nous là pour l'énumération des phénomènes complexes qui peuvent apparaître sur un exemple apparemment simple. La modélisation est la première étape de l'ingénieur ou du chercheur en calcul scientifique. Nous allons en donner une description plus précise à l'aide d'exemples choisis à nouveau en mécanique, mais qui pourrait se retrouver en électromagnétisme, en chimie ou en biologie.



Une corde type

Le plan est le suivant :

- 1. Les équations de conservation
- 2. Les lois rhéologiques
- 3. Les conditions aux limites
- 4. La formulation variationnelle
- 5. Les aspects dynamiques
- 6. La simplification des modèles
- 7. La validité des modèles
- 8. Les phénomènes couplés
- 9. A la recherche des phénomènes cachés
- 10. Le contrôle et l'optimisation des structures
- 11. Identification et recalage
- 12. Conclusions

### 1 Les équations de conservation

De façon un peu familière, une équation de conservation traduit en termes mathématiques que ce qui entre dans un volume de matière diminue de ce qui en sort est égal à ce qui y reste. Prenons l'exemple de la thermique : la quantité de chaleur qui passe d'un point à un autre est représentée par un vecteur flux de chaleur noté  $q$ . Si on note  $\Omega$  un volume de l'espace,  $\partial\Omega$  sa frontière,  $\nu$  la normale unitaire à cette dernière et dirigée vers l'extérieur de  $\Omega$ , la quantité de chaleur reçue par le corps intérieur à  $\Omega$  est (le point désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^3$ ) :

$$\delta Q = - \int_{\partial\Omega} q \cdot \nu \quad (1.1)$$

Le premier principe de la thermodynamique nous dit qu'en l'absence de travail mécanique et en notant  $E = \int_{\Omega} \varrho e$  ( $\varrho$  est la masse volumique et  $e$  l'énergie interne spécifique) l'énergie interne contenue dans  $\Omega$ , nous avons l'équation de conservation suivante (en l'absence d'apport de chaleur extérieur par radiation ou réaction chimique) :

$$\frac{dE}{dt} = \delta Q \quad (1.2)$$

Un simple calcul utilisant la formule de Stokes :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(q) = \int_{\partial\Omega} q \cdot \nu,$$

donne alors en chaque point de l'espace et en supposant que les particules de matières restent inchangée dans  $\Omega$  car les principes sont universels, c'est à dire vrai pour tout choix de  $\Omega$  :

$$\varrho \frac{de}{dt} + \operatorname{div}(q) = 0. \quad (1.3)$$

Pour compléter cette équation il convient de lui adjoindre des lois de comportement : l'une reliant par exemple le flux de chaleur à une grandeur intensive observable (la température) et l'autre reliant l'énergie interne spécifique  $e$  à cette même température. Donnons

d’autres exemple d’équations de conservation en mécanique.

*La conservation de la matière*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad (1.4)$$

où  $u$  est la vitesse des particules de matière.

*Le principe des puissances virtuelles*

$$\rho \frac{du}{dt} = \operatorname{div}(C) + f, \quad (1.5)$$

où  $C = C_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  est le tenseur symétrique des contraintes (de Cauchy),  $\frac{du}{dt}$  est l’accélération et  $f$  la densité des forces de volumes.

Toutes ces relations ont une propriété remarquable : elles sont vraies pour tous les milieux solides, fluides ou gazeux.

## 2 Les lois rhéologiques

Les équations de conservation que nous avons formulées au paragraphe précédent font intervenir des grandeurs extensives comme l’énergie, la quantité de chaleur ou la masse. Pour rendre le système résoluble il est en général nécessaire d’introduire des relations complémentaires appelées lois de comportement. Par exemple l’énergie interne est reliée à la température (qui est une notion introduite par le second Principe de la thermodynamique), par la loi ( $c_v$  est la capacité calorifique à volume constant du milieu) :

$$e = c_v T \quad (1.6)$$

Le flux de chaleur  $q$  est relié au gradient de température par la loi de Fourier ( $k$  est un coefficient de conduction du milieu) :

$$q = -k \nabla T \quad (1.7)$$

Les contraintes mécaniques  $C$  sont reliées aux déformations  $\gamma$  par la loi suivante dans le cas de l’élasticité linéaire des corps solides :

$$C = R \gamma \quad (1.8)$$

où  $\gamma$  est la partie symétrique du gradient de déplacement au point considéré et  $R$  un isomorphisme de l’ensemble des matrices  $3 \times 3$  symétriques dans lui-même. On obtient ainsi dans le cas de l’équation provenant du premier principe de la thermodynamique :

$$c_v \frac{dT}{dt} - \operatorname{div}(k \nabla T) = 0 \quad (1.9)$$

que l’on appelle *équation de la chaleur*.

## 3 Les conditions aux limites

Prenons à nouveau l’exemple de l’équation de la chaleur traduisant le premier principe de la thermodynamique (1.9) et plaçons nous pour simplifier dans le

cas d’un équilibre thermique pour un milieu homogène ( $k = \text{constante}$ ). L’équation devient dans ce milieu :

$$-\Delta T = 0 \quad (1.10)$$

Il existe alors une infinité de solutions à (1.10) constituée de l’ensemble des fonctions harmoniques. Or, sur un ouvert  $\Omega$  régulier, de telles fonctions (formule de Poisson) ne dépendent que des valeurs sur la frontière  $\partial\Omega$  de l’ouvert  $\Omega$ . C’est ainsi que si l’on fixe  $T$  sur  $\partial\Omega$  alors  $T$  est parfaitement définie. Cette nécessité d’adjoindre des informations complémentaires sur  $\partial\Omega$  constitue les conditions aux limites. Fixer la température  $T$  (condition de Dirichlet), n’est pas l’unique possibilité. On peut aussi imposer la composante normale du flux de chaleur (condition de Neumann) et il existe bien d’autres possibilités.

## 4 La formulation variationnelle dans la cas stationnaire

La résolution numérique sur ordinateur de l’équation (1.10) nécessite de construire des fonctions qui soient aux moins deux fois dérivables, ce qui est un challenge redoutable. Une astuce remarquable fut suggérée par Peter Lax. Elle consiste à multiplier (1.10) par une fonction test  $v$ , à intégrer sur l’ouvert  $\Omega$  et à appliquer la formule d’intégration par parties, souvent appelée formule de Green qui est une *petite variante* de la formule de Stokes. On obtient ainsi la suite de relations ci-dessous pour l’exemple de choix de conditions aux limites : Dirichlet sur  $\Gamma_0$  et Neumann sur le complémentaire  $\Gamma_1$  de  $\Gamma_0$  sur  $\partial\Omega$  ;

$$\begin{cases} -\Delta T = 0 \text{ dans } \Omega, \\ T = T_0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial T}{\partial \nu} = g \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (1.11)$$

puis en multipliant par une fonction test  $v$ , en intégrant sur l’ouvert  $\Omega$  et en appliquant la formule de Stokes (Green dans la version utilisée), nous obtenons :

$$\forall v \quad - \int_{\Omega} \Delta T v = 0, \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow$$

$$\forall v \quad \int_{\Gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \nu} v + \int_{\Gamma_1} g v + \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla v = 0.$$

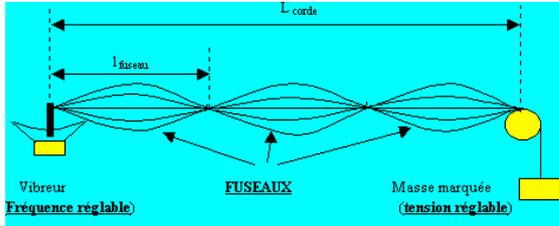
Puisque la dérivée normale de  $T$  notée  $\frac{\partial T}{\partial \nu}$  est inconnue sur  $\Gamma_0$  on y choisit  $v = 0$  et  $T$  sera recherchée sous la forme suivante :

$$T = RT_0 + \delta T,$$

où  $RT_0$  est un relèvement dans  $\Omega$  de la donnée de Dirichlet sur  $\Gamma_0$  et  $\delta T$  est nulle sur  $\Gamma_0$  comme la fonction test  $v$ .

### 5 Les problèmes dynamiques

L'exemple le plus simple est celui de la vibration d'une corde. En fait, il s'agit d'une ancienne expérience des cours de mécanique ; l'expérience de Melde.



Expérience de Melde

En adoptant un modèle élastique linéaire et en désignant par  $d$  le déplacement transverse des points de la ligne moyenne de la corde, on construit le modèle suivant dans lequel  $A$  est la section de la corde,  $\rho$  sa masse volumique et  $mg$  le poids des masselottes placées sur le plateau de la figure. Par ailleurs  $f$  est une force transverse linéique appliquée le long de la corde :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in ]0, L[ \times ]0, t_0[ : \\ \rho A \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - mg \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = f. \end{cases} \quad (1.13)$$

auquel on adjoint les conditions aux limites suivantes :

$$d(0, t) = d(L, t) = 0 \quad \forall t \in ]0, t_0[ \quad (1.14)$$

et des conditions initiales :

$$\begin{cases} d(x, 0) = d_0(x) \quad \forall x \in ]0, L[, \\ \frac{\partial d}{\partial t}(x, 0) = d_1(x) \quad \forall x \in ]0, L[. \end{cases} \quad (1.15)$$

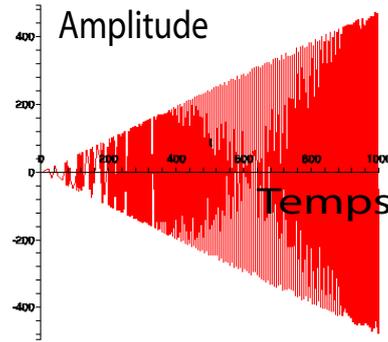
Bien entendu une équation aussi simple peut être résolue quasiment analytiquement. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} d(x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n(t) w_n(x), \\ \text{avec la notation :} \\ \alpha_n(t) &= a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \\ &+ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n(s) \sin(\omega_n(t-s)) ds \end{aligned} \quad (1.16)$$

où nous avons posé :

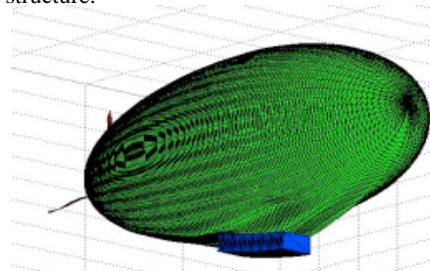
$$\begin{cases} a_n = \int_0^L w_n d_0 dx, \quad b_n = \int_0^L w_n d_1 dx, \\ f_n = \int_0^L w_n f dx, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{mg}{A\rho}} \\ w_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{cases} \quad (1.17)$$

Lorsque l'une des fonctions  $f_n$  est de la forme  $f_n(t) = F_n \sin(\omega_n t + \phi)$ , la solution du modèle (1.13) diverge avec le temps. On a un phénomène de résonance qui est destructeur pour la structure.



Mise en résonance linéaire

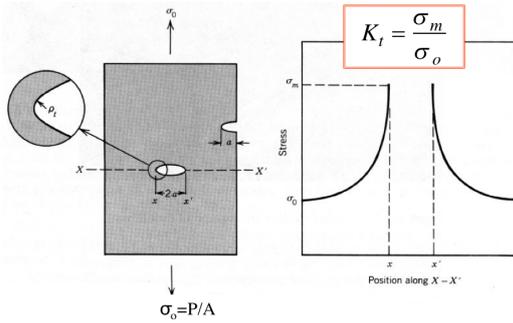
Les nombres  $\omega_n$  sont les pulsations propres et on comprend qu'il s'agisse de valeurs particulièrement critiques. Prenons le cas d'une structure complexe, par exemple un dirigeable. Le modèle de la corde peut-être étendu à cette structure, mais il faut faire intervenir la théorie des coques minces pour modéliser la structure dans son ensemble. On calcule l'analogie des pulsations propres  $\omega_n$  ainsi que les modes propres associés et l'ingénieur se doit de comparer les valeurs obtenues à celle de la vitesse angulaire de rotation des moteurs, ainsi que leurs multiples en fonction du nombre de pales de ce dernier. S'il y a coïncidence un risque de résonance peut apparaître et il faudra en protéger la structure.



Un mode de vibration d'un grand dirigeable (CNAM)

### 6 La simplification des modèles

Dès qu'un scientifique voit apparaître un petit paramètre  $\epsilon$  quelque part, il recherche si cela lui permet de simplifier son modèle complet. Dans un premier temps, il calcule les termes dominants, puis il essaye d'affiner la solution initiale à l'aide d'un correcteur local. Par exemple, cela peut conduire à des problèmes de couches limites (concentration de phénomènes au voisinage d'une frontière), ou à des problèmes raides (perte de régularité ou très fortes variations de la solution au voisinage de certains points).

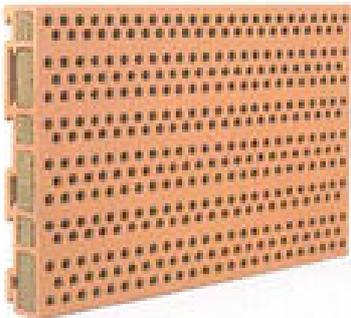


Couches limites au voisinage d'un trou

Donnons deux approches d'analyse multiéchelle qui font partie de la panoplie du mathématicien appliqué. L'une est l'homogénéisation qui joue un rôle particulier pour les matériaux composites et l'autre, est la réduction de dimension largement utilisée pour la théorie des poutres, des plaques et des coques.

### 6.1 L'homogénéisation des structures périodiques

Commençons par une approche intuitive. Imaginons deux ressorts de raideurs respectives  $k_1$  et  $k_2$  que l'on monte en séries puis en parallèles. Dans le premier cas le ressort équivalent aura une raideur  $k_1 + k_2$ . Dans le second ce sera  $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ . Considérons maintenant une situation plus complexe, celle d'un matériau composé de trous régulièrement répartis.



Plaque multiperforée

Le principe de l'homogénéisation est de remplacer le milieu troué par un milieu homogène sans trou. Pour cela on considère une cellule élémentaire et on effectue des simulations de comportement sous différentes sollicitations mécaniques. Cela permet de déduire des relations en moyenne sur la cellule reliant les contraintes moyennes aux déformations moyennes. En passant à une échelle macroscopique où la cellule devient un point, on définit ainsi une nouvelle loi de comportement en moyenne dite homogénéisée. Il est

ensuite possible de retrouver une information locale (dites microscopique), en effectuant un calcul local sur une cellule et ceci en respectant les valeurs moyennes trouvées à l'aide du modèle homogénéisé. En fait pour obtenir la localisation des effets microscopiques il faut trouver des conditions aux limites sur la cellule qui le permettent. Dans la mesure où les cellules sont réparties périodiquement, des conditions de périodicité sont les bonnes conditions comme cela fût démontré par Luc Tartar.

### 6.2 Réduction de dimension

Que ce soit des voiles minces en béton ou des ailes d'avion, voire des carrosseries de voitures ou encore des coques de navires, beaucoup de structures mécaniques sont assimilables à des surfaces. Et l'ingénieur est fortement tenté de construire une théorie bidimensionnelle qui serait plus simple que la théorie tridimensionnelle pour analyser, prédire et même optimiser le comportement de tels objets. L'idée naturelle est alors d'utiliser l'épaisseur comparée aux autres dimensions comme petit paramètre. En fait, il apparaît deux petits paramètres : l'un noté  $\varepsilon$ , est l'épaisseur comparée aux dimensions transverses et l'autre noté  $\eta$ , est le rapport entre l'épaisseur et le rayon de courbure locale de la coque. Suivant les ordres de grandeurs respectifs de ces deux petits paramètres on peut alors construire un modèle approché du modèle tridimensionnel et qui lui, est bidimensionnel, c'est à dire ne fait intervenir que des grandeurs (les inconnues) définies sur la surface moyenne de la coque.



Aéroréfrigérant atmosphérique de centrale nucléaire

Par exemple pour  $\eta = 0$  on trouve les modèles de plaques minces, pour  $\eta \simeq \varepsilon$  on trouve des modèles de membrane et enfin pour  $\eta \simeq \varepsilon^2$  on trouve les modèles de coques les plus classiques. Cependant il existe d'autres approches mieux adaptées et qui permettent de regrouper tous ces modèles en un seul lui même surfacique et pouvant redonner l'une des trois situations

précédente suivant, par exemple, les valeurs de la courbure locale de la surface moyenne. C’est la théorie de W.T. Koiter.

### 6.3 L’énergie et l’équilibre, seuls liens entre les modèles originaux et simplifiés

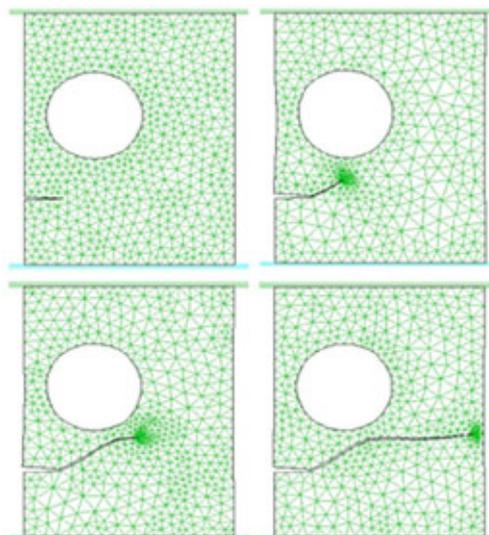
Les simplifications que l’on peut apporter aux différents modèles doivent trouver un cadre de justification. D’un point de vue à la fois mathématique et physique deux propriétés sont fondamentales : l’une est la conservation des énergies par unité de matière mises en jeu (premier principe de la thermodynamique) que se soit pour le modèle complet ou celui obtenu après simplification ; l’autre concerne le principe fondamental de la mécanique et traduit que dans les deux cas l’équilibre des efforts doit être conservés. Par contre les lois de comportement peuvent être violées sans état d’âme car elles ne sont pas des vérités absolues, mais seulement des approximations heuristiques de ce que l’on observe expérimentalement, par exemple lors d’un essai de traction sur une éprouvette.



Machine de traction sur éprouvettes

Si on utilise une représentation eulérienne, c’est à dire liée à un point géométrique et non pas matériel comme dans un représentation Lagrangienne, il convient également de prendre en compte la conservation de la matière, ce qui est le cas en mécanique des fluides et en acoustique pour lesquels la description eulérienne (celle du laboratoire !) est souvent mieux adaptée. En fait, les équations d’équilibre permettent de compenser certaines imprécisions au niveau de la conservation de l’énergie. Donnons un exemple un peu surprenant, celui de la mécanique de la rupture dite fragile. On considère un milieu présentant une fente et on utilise un

modèle d’élasticité linéaire pour représenter les champs de déformations et de contraintes. Or un calcul analytique mené au voisinage de la pointe de la fissure nous montre que la solution devient infinie (en contraintes et en déformations), ce qui est en contradiction avec l’utilisation d’un modèle élastique. Il conviendrait donc de faire appel à un modèle rhéologique faisant intervenir la plasticité voire l’endommagement. Cependant, d’une part les équations d’équilibre sont vérifiées et d’autre part, l’énergie reste finie. Il y a donc quelque chose de vrai dans un tel modèle. C’est le paradoxe de *l’invraisemblance rhéologique locale*. En fait on peut montrer que l’énergie liée à ces singularités peut également s’exprimer à l’aide des contraintes et des déformations estimées loin du fond de fissure et qu’elles peuvent être calculées en utilisant un modèle d’élasticité. Cette propriété permet de rendre compte de façon fiable et d’un point de vue global de mécanismes localement très complexes.



Evolution d’une fissure par simulation (CEMEF)

## 7 Validité des modèles

La réalité physique est tridimensionnelle et a priori tout ce qui est visible doit être pris en compte à la fois au niveau des détails de la géométrie mais aussi des lois de comportement rhéologique. Les simplifications ne sont valables que si elles sont argumentées par rapport au problème posé. Elles doivent être justifiées à trois niveaux :

*Niveau 1* Le modèle simplifié doit avoir une solution (si possible une seule). Sa classe de régularité doit permettre de définir pour la matière une énergie finie. En général cette démarche relève de l’analyse fonctionnelle. C’est l’une des grandes contributions mathématiques du  $XX^{me}$  siècle aux sciences de l’ingénieur.

**Niveau 2** Un modèle doit permettre de reproduire qualitativement et quantitativement les phénomènes qui intéressent l'ingénieur. Par exemple le flambage d'une structure, ou une instabilité dynamique.



Effondrement des tours de Ferrybridge en 1965

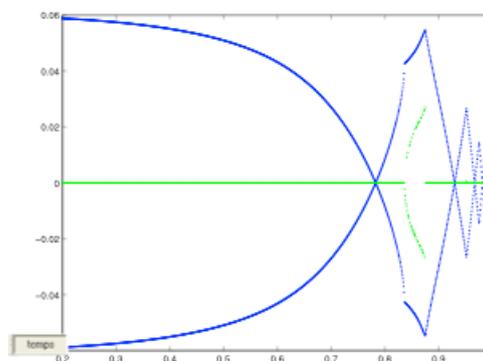
**Niveau 3** Il est nécessaire d'estimer l'erreur commise en remplaçant le modèle complet par le modèle approché. A cette erreur viendra s'ajouter l'erreur d'approximation qui intervient dans l'approximation numérique du modèle approché. Si une procédure d'optimisation ou de contrôle est effectuée sur le modèle approché, il faut veiller à ce qu'elle ne conduise pas à des résultats contraires à ce que l'on obtiendrait sur le modèle complet. L'outil le plus classique est l'estimation à priori qui est une information utilisant l'énergie. Mais de plus en plus les chercheurs font appel à une estimation a posteriori qui utilise les équations d'équilibre et suggérée initialement par Prager et Synge.

## 8 Les phénomènes couplés

- **Fluide incompressible avec une structure** Traditionnellement le problème couplé type est celui de l'interaction entre un liquide et une structure. Le cas le plus simple dans cette vaste gamme de problèmes, est celui d'un liquide incompressible contenu dans un réservoir flexible. En fait, dans ce cas le fluide qui n'offre aucune résistance à la déformation, agit par son inertie et on montre que sa prise en compte revient à modifier la répartition des masses de la structure. On parle de masse ajoutée. L'exemple célèbre est celui des modes propres de ballonnement d'un liquide dans un réservoir. Mais lorsque le liquide présente une surface libre, il convient de prendre en compte les phénomènes de gravité (vagues), et même parfois de tension superficielle et de capillarité (forces de cohésion électrostatiques).

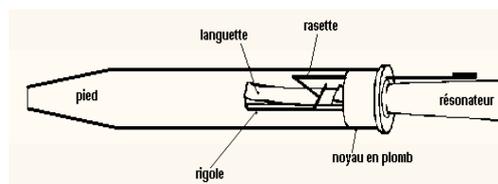
Dans ce cas les modèles sont beaucoup plus complexes et l'effet du liquide ne peut pas se réduire à celui d'une masse ajoutée.

- **Fluide compressible avec une structure** En acoustique aérienne, la propagation du son dans le fluide est plus lente que dans la structure et il est nécessaire de prendre en compte la compressibilité du fluide. Ici encore la difficulté est plus importante que dans le cas d'un liquide incompressible. Si en outre l'air est en mouvement, (cas d'un écoulement autour d'un avion, d'une voiture ou d'un train ou même d'un instrument de musique à vent), les équations de couplages deviennent plus compliquées et des phénomènes étranges d'instabilités peuvent même apparaître pour certaines vitesses critiques de l'écoulement. Donnons un exemple simple : celui d'un écoulement dans une tuyauterie flexible. Si on calcule les modes de vibration du système couplé en fonction de la vitesse de l'écoulement on trouve dans certains cas une vitesse critique pour laquelle les pulsations propres deviennent imaginaires et les solutions sinusoidales (voir le cas de la corde), deviennent des exponentielles réelles qui traduisent une instabilité exponentielle. Nous avons tracé l'évolution de ces pulsations en fonction de la vitesse d'écoulement. La partie réelle est en bleue et la partie imaginaire en vert. C'est cette dernière qui permet de détecter l'apparition d'une instabilité.



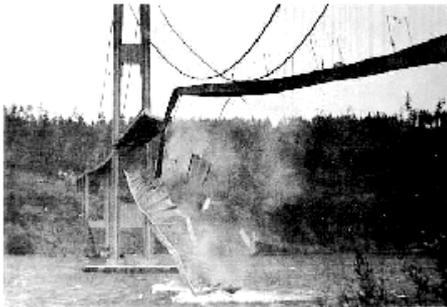
Pulsations propres / vitesse de l'écoulement

De telles instabilités sont des phénomènes redoutés des concepteurs mais aussi parfois recherchés, notamment dans les instruments de musique à vent de façon à amplifier le son émis.



Principe de fonctionnement d'une clarinette

• *Fluide visqueux avec une structure* Dans ce cas les quantités de mouvement des particules sont importantes et des frottements entre elles conduisent à des phénomènes de couches limites qui peuvent donner naissance à des tourbillons. Les forces exercées sur les structures sont, en général, plus importantes que dans le cas de l’acoustique. On entre dans le domaine de l’aéroélasticité. Les modélisations sont beaucoup plus complexes et il est nécessaire de prendre en compte le mouvement de la structure dans celui du fluide. En fait on se trouve dans une situation où la frontière entre les deux milieux est mobile. Ce domaine du calcul scientifique en est encore à ses débuts mais il représente certainement l’un des challenges les plus stimulants des prochaines décennies. Les phénomènes recherchés sont le flottement (croisement de modes propres de la structure sous l’effet des forces aérodynamiques), le tremblement (dû aux instabilités de l’écoulement comme la turbulence) et les vibrations de décrochage retardées (galop), dues à la prise en compte d’un phénomène de vent apparent comme sur les voiliers et qui fut à l’origine de la ruine du pont de Tacoma Narrows.



Le fameux pont de Tacoma-Narrows

Mais il existe de nombreux autres phénomènes couplés notamment dans les aspects multi-physiques faisant intervenir un couplage entre l’électromagnétisme et un fluide conducteur (phénomène dynamo dans les cuves de sodium des surrégénérateurs nucléaires) ou des réactions chimiques et un écoulement (combustion) ... L’émergence des mathématiques du vivant fournit aussi un vaste champ d’applications de ces modélisations couplées.

## 9 A la recherche des phénomènes cachés

Certains phénomènes physiques ne sont pas directement observables, mais sont détectables par leurs conséquences. Par exemple dans le cas d’accidents l’ingénieur recherche parfois par des simulations de modèles, l’origine de l’évènement. Bien entendu le modèle utilisé doit être assez riche pour contenir de façon éventuellement cachée la signature du phénomène. Tout l’art du calcul scientifique est en jeu dans cette démarche.

### 9.1 Un exemple en aéroélasticité

Donnons un premier exemple qui ressemble étrangement à celui du pont de Tacoma qui fut l’un des accidents fondateurs de l’aéroélasticité. Il s’agit de l’explosion d’un modèle réduit d’avion en soufflerie. Une maquette rigide d’avion est montée en dard sur un bras articulé lui permettant de prendre diverses configurations (en incidence, dérapage et roulis) par rapport à la direction du vent amont. Cependant les efforts aérodynamiques exercés par l’écoulement sur cette dernière peuvent provoquer un mouvement d’oscillations en raison de la flexibilité inévitable de la balance (c’est ce qui permet de mesurer les efforts grâce à des jauges de déformations placées en ces endroits). Si  $\alpha$  est l’angle d’incidence (oublions le dérapage et le roulis), le mouvement de la structure (“avion+balance”) est régi par un simple modèle à un degré de liberté que l’on peut formuler ainsi :



Montage en dard dans une soufflerie (CNAM)

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = f(\alpha), \quad (1.18)$$

où  $f$  représente le moment des forces aérodynamiques (par unité d’inertie) et ramené au centre de rotation en tangage noté  $\alpha$ . Une linéarisation autour d’un angle  $\alpha_0$  tel que  $\omega_0^2 \alpha_0 = f(\alpha_0)$ , (dit nominal) conduit à l’équation suivante :

$$\ddot{\alpha} + \left(\omega_0^2 - \frac{df}{d\alpha}(\alpha_0)\right)(\alpha - \alpha_0) = 0. \quad (1.19)$$

Dans la mesure où le dimensionnement de la raideur de la balance a été réalisé convenablement on a  $\omega_0^2 \gg \frac{df}{d\alpha}(\alpha_0)$ . On en déduit qu’aucune instabilité n’apparaît sur ce petit modèle à un degré de liberté. Or l’expérimentation a conduit à des cycles d’oscillations d’amplitude constante (après un transitoire) et la rupture de la balance a mis en évidence un phénomène de rupture par fatigue oligocyclique. Bien entendu, si la balance avait été plus solide, l’incident ne se serait pas produit. Mais d’une part, cela n’explique pas ce qui s’est passé et d’autre part cette balance avait été dimensionnée convenablement pour résister aux efforts

prédits par le petit modèle précédent. Le renouvellement prudent de l’expérience a conduit au même incident. Mais cela a également permis d’enregistrer des signaux temporels à partir des informations fournies par les jauges de la balance. L’analyse de Fourier de ces signaux a alors permis de mettre en évidence un spectre faisant intervenir les pulsations suivantes :

$$\omega_{00} = \sqrt{\omega_0 - \frac{df}{d\alpha}(\alpha_0)}, 2\omega_{00}, 3\omega_{00}, 4\omega_{00}, 6\omega_{00}.$$

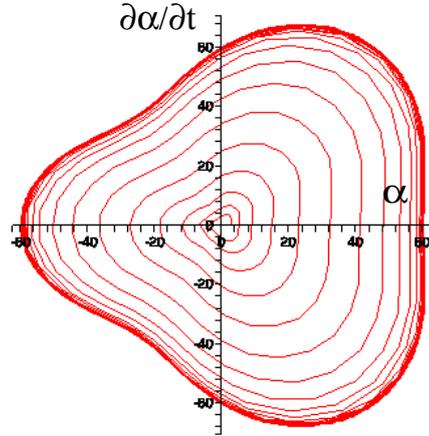
Le point important est *le trou fréquentiel* pour  $5\omega_{00}$ . Une première idée est alors de responsabiliser l’écoulement en évoquant une modification drastique de celui-ci lors du mouvement de la maquette et pouvant provoquer des efforts très importants. Mais cela est peu vraisemblable pour des raisons de simple bilan énergétique. Il est en effet nécessaire que l’énergie qui a provoqué la ruine soit puisée dans l’écoulement progressivement pour être réaliste. Une autre idée, qui fut celle de K.Y. Billah et R. Scanlan pour expliquer de façon définitive l’effondrement du pont de Tacoma Narrows, est de prendre en compte le phénomène de vent apparent. En fait chaque point de la structure ne voit qu’un vent apparent qui est la différence entre la vitesse de l’écoulement et celle de ce point. Si par exemple il se déplace à la vitesse du vent il ne sentira pas les effets du vent. Ainsi la structure aura une incidence apparente  $\alpha_a$  par rapport au vent apparent qui est celui à prendre en compte dans l’étude du mouvement de l’avion. De ce fait, le moment des forces aérodynamiques devient une fonction de  $\alpha$  et de  $\dot{\alpha}$  et on pose  $f(\alpha_a) = g(\alpha, \dot{\alpha})$ . La linéarisation conduit maintenant à l’équation suivante :

$$\ddot{\alpha} - \frac{\partial g}{\partial \dot{\alpha}} \dot{\alpha} + (\omega_0^2 - \frac{\partial g}{\partial \alpha})(\alpha - \alpha_0) = 0, \quad (1.20)$$

et  $\alpha$  doit satisfaire des conditions initiales qui correspondent à une perturbation initiale. Il s’agit donc d’une équation différentielle du second ordre et à coefficients constants. La recherche des solutions s’effectue à l’aide des racines de l’équation caractéristique (on cherche des solutions sous la forme  $Ae^{\lambda t}$ ) :

$$\lambda^2 - \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{\alpha}} + (\omega_0^2 - \frac{\partial g}{\partial \alpha}) = 0. \quad (1.21)$$

Une instabilité dynamique peut alors apparaître si le coefficient de  $\dot{\alpha}$  est négatif. On observe une croissance en spirale dans le plan des phases  $(\alpha, \dot{\alpha})$ . Il est alors nécessaire de prendre en compte les termes non linéaires pour prédire le comportement ultérieur, une fois l’instabilité déclenchée. La théorie des formes normales permet de calculer un cycle limite d’oscillations sous forme quasi-analytique (il faut tout de même disposer des dérivées des forces aérodynamiques par rapport à  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$  et ce jusqu’à l’ordre trois (au moins). Une simple observation de l’algorithme utilisé pour construire ce cycle limite montre que l’harmonique 5 n’est pas présente. C’est une signature caractéristique de ce phénomène.



Cycle limite d’oscillation en tangage de l’avion (galop)

En outre, les recoupements en forme et en amplitude des mouvements observés, justifient pleinement les hypothèses de cette modélisation apparemment très simple, mais nécessitant un outillage mathématique non négligeable. En particulier, les calculs analytiques ne peuvent être menés manuellement. Le recours à un logiciel de calcul formel est largement souhaitable. La démarche du calcul scientifique sur cet exemple est d’utiliser un cadre mathématique puissant (les systèmes dynamiques), pour résoudre simplement un problème complexe qui, comme dans le cas du pont de Tacoma Narrows, était a priori très déroutant. L’emploi en aveugle des puissants codes de calculs n’aurait conduit à rien et aurait nécessité un investissement considérable. La *petite* stratégie des formes normales représente des coûts de calcul très raisonnables et à permis d’identifier et d’expliquer le phénomène. Cela n’est pas sans rappeler l’usage de la fronde de David pour terrasser Goliath. Le lecteur trouvera sur internet un article remarquable de K. Y. Billah et R. Scanlan, qui retrace cette aventure scientifique qui a fait couler tant d’encre.

## 9.2 Un exemple en propagation d’onde

L’exemple ci-après est dû à Love pour l’acoustique et à Lamb pour les solides. Cependant, il a connu un nouvel intérêt avec l’apparition des phénomènes dynamiques dans les matériaux composites. Considérons un milieu constitué de deux matériaux ayant des vitesses d’ondes de cisaillement distinctes notées  $c_1$  et  $c_2$ . Supposons que  $c_1 < c_2$ , mais  $c_1 \simeq c_2$ . Le milieu 1 est une bande étroite. Des ondes provenant du milieu 2 peuvent pénétrer dans la bande 1 mais y restent quasiment piégées. Au bout d’un certain temps, l’essentiel de l’énergie initiale se trouvera confinée dans cette bande. En fait la bande étroite se comporte comme un guide d’ondes stationnaires dans la mesure où des conditions aux limites de réflexions aux deux extrémités de la bande empêche l’énergie de sortir. Par exemple

un joint de colle entre deux matériaux se comporte de cette façon. Mais souvent la colle (epoxy) possède des propriétés d'amortissement qui font disparaître cette énergie accumulée localement. Il en va différemment des colles fragiles (cyanolite) que l'on peut détériorer par des ultrasons grâce (ou à cause) de ce phénomène. Une simulation numérique du système comprenant les deux solides mais ne prenant pas en compte une modélisation suffisamment fine du joint de colle, n'a aucune chance de rendre compte explicitement de ce qui se passe. Cependant, un bilan énergétique, obtenu en faisant se déplacer de façon virtuelle la position du joint de colle, permet de mettre en évidence une quantité facilement calculable à l'aide d'un modèle grossier que l'on appelle *le taux de restitution de l'énergie*. Il caractérise précisément l'énergie emmagasinée dans le joint de colle. Comme en mécanique de la rupture, l'outil mathématique peut servir de microscope dans des résultats de calculs utilisant un modèle ne mettant pas en évidence de façon visible un phénomène caché.

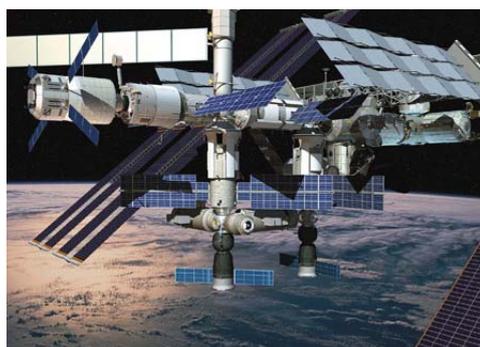
## 10 Optimisation et contrôle

Une question naturelle est de se demander comment utiliser la modélisation en calcul scientifique dans un processus industriel. Bien entendu, simuler la réalité qui nous entoure avec des modèles fiables, est une activité féconde et instructive. Mais ce n'est pas une finalité industrielle, ce n'est qu'une étape. Dans les premiers temps du calcul scientifique, les ingénieurs se servaient des grands codes de calcul des structures (Nastran, Abacus, Castem, Titus, Pamcrash, Aster...) pour vérifier le bon fonctionnement des objets qu'ils avaient réalisés. Puis l'activité s'est déplacée au niveau de la conception avant réalisation. Il est alors apparu la notion de *maquette virtuelle*. Puis devant la facilité de modification de cette réalité virtuelle, l'optimisation de son fonctionnement mais aussi de son coût de fabrication sont devenus l'essentiel de l'activité des bureaux d'études. Les techniques d'optimisation mathématique sont devenues monnaie courante, notamment avec la généralisation du concept d'état adjoint pour exprimer la sensibilité d'un critère par rapport à des paramètres de conception. Plus récemment, le concept d'optimisation a franchi un nouveau pas en introduisant le concept d'optimisation topologique qui permet de généraliser la notion de gradient et de définir dans certains cas la pièce optimale à partir d'un bloc massif par *extrusion numérique*. Depuis peu, un nouveau challenge est apparu : celui des *matériaux dits intelligents* ! Ce sont des milieux dont on peut modifier les propriétés pendant le fonctionnement de façon à les adapter aux besoins. Un peu comme un oiseau qui se configure différemment suivant qu'il plane ou qu'il est en piqué pour chasser. Mais les modifications peuvent être aussi beaucoup plus rapides, par exemple dans le cas de murs d'absorption du bruit munis de systèmes actifs, un peu comme la peau des dauphins qui s'adapte pour améliorer la pé-

nétration dans l'eau. On voit donc apparaître, parmi les matériaux intelligents, deux classes de problèmes d'optimisation suivant l'échelle de temps considérée. Dans le premier cas, ce sont des modèles stationnaires (indépendant du temps) qui interviennent. Dans le second cas il est nécessaire de faire intervenir le mouvement propre dans le processus d'optimisation. Mais dans tous les cas on est confronté à des problèmes de contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles pour lesquels J.L. Lions a proposé une approche systématique et parfaitement opérationnelle. Mais bien entendu, après approximation, par exemple à l'aide d'une méthode d'éléments finis, on retrouve des modèles matriciels ou éventuellement d'équations différentielles matricielles.

## 11 Identification et recalage de modèles

Les lois rhéologiques qui relient empiriquement les grandeurs physiques, doivent être identifiées à partir d'expérimentations simples et bien maîtrisées. Par exemple, les coefficients d'élasticité d'un matériau sont évalués à l'aide d'une machine de traction. Lors d'un frottement on doit également définir les paramètres d'une loi de friction à partir de mesures expérimentales simples. Mais dans certains cas il est très difficile d'avoir accès directement au matériau que l'on souhaite caractériser. Par exemple dans le cas de l'amortissement d'une grande structure spatiale, les cause d'amortissement sont multiples et il est encore peu réaliste d'espérer prendre en compte tous les ingrédients qui en sont la cause. On peut par contre, se placer à un niveau plus macroscopique et identifier globalement des lois d'amortissement. Mais dans ce cas il est nécessaire d'avoir recours au modèle complet et de considérer les paramètres à identifier comme des variables cachées. On procède alors à une méthode de recalage des paramètres en question de façon à retrouver au mieux la solution globale observée.



Projet de la station orbitale (EADS)

## 12 Conclusions

La météorologie, la sismique, la fusion nucléaire,

les processus de combustion, les mathématiques du vivant sont d'autres exemples d'applications du calcul scientifique que nous n'avons pas abordés dans cette rubrique. Mais les idées y sont similaires et l'activité des chercheurs et ingénieurs qui travaillent dans ces domaines, le sont également. La modélisation du monde qui nous entoure, avec lequel nous devons composer, ne se fait plus simplement par observation. Une modélisation sur laquelle il est possible de construire une argumentation, est nécessaire. Comme Le Verrier le fit autrefois pour découvrir Neptune, le calcul scientifique

est un instrument et même une démarche qui permet de comprendre, mais aussi d'agir sur le monde qui nous entoure et dont nous percevons les effets. La complexité de cette discipline s'évanouira sans doute avec le temps et le développement des ordinateurs ainsi que celui des grands codes de calculs. Elle a vocation à former des ingénieurs et des chercheurs pour l'industrie qui, en s'appuyant sur des raisonnements mathématiques, sauront se porter garants de la validité des conclusions pratiques qu'ils seront amenés à formuler pour prévoir, concevoir, vérifier, optimiser, contrôler et innover.

### Bibliographie

- D. V. ANOSOV, V.I. ARNOLD [1985], *Dynamical systems*, Vol. 1-9, Encyclopaedia of mathematical sciences, Springer-Verlag, Berlin.
- K. Y. BILLAH, JR. SCANLAN [1991], *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbook*, Ann. J. Phys. 59, (2).
- H.D. BUI [1980], *La mécanique de la rupture fragile*, Masson, Paris.
- J. CEA [1971], *Optimisation, Théorie et algorithme*, Dunod, Paris.
- G. DUVAUT J. L. LIONS [1972], *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris.
- Y. C. FUNG [1965], *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall, New-York. P. GERMAIN [1986], *Mécanique*, Ellipses, Paris. W.T. KOITER [1959], A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shell. In *Proc. Symp. on Theory of thin Elastic Shell*, North Holland, Amsterdam, 1959, pp. 12-33.
- J.L. LIONS [1968], *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris.
- A. E. H. LOVE [1924], *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover edition, London.
- W. PRAGER AND J. L. SYNGE, [1947] Approximations in elasticity based on the concept of the function space, *Quart. Appl. Math.* 5 (1947), 241–269.
- L. SCHWARTZ [1961], *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris.
- L. TARTAR [1990], *H-measures, a New Approach for Studying Homogenization, Oscillations and Concentration Effects in Partial Differential Equations*, Proc. Roy. Soc. Edin. 115A : 193–230.