Projet du cours MAA103. Envoyez par mail simultanément à: philippe.destuynder@lecnam.net et olivier.wilk@lecnam.net

Ph. Destuynder et Olivier Wilk

à rendre avant le 31 mars 2018

1 Introduction

L'objet de ce problème est d'étudier le contrôle actif, de deux pendules renversés liés par une rotule, à un chariot animé d'un mouvement horizontal par l'intermédiaire d'une force $u(t)$ qui est le contrôle. Ces deux pendules sont constitués de masselottes identiques de masse m et reliées aux points d'ancrage par deux tiges de masses négligeables de longueurs respectives l_1 et l_2. Il y a trois ressorts pour modérer l'amplitude des mouvements: l'un de raideur K relie le chariot porteur à un point fixe; les deux autres sont des ressorts de torsion de raideur C (la même pour les deux pendules). Le schéma de montage est représenté sur la figure 1 Les équations linéarisées modélisant le mouvement autour de la

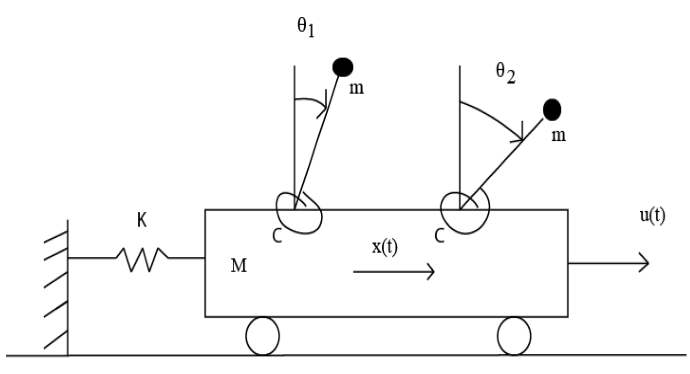

Figure 1: Principe du montage

position d'équilibre instable: $\theta_1 = \theta_2 = x = 0$, sont les suivantes:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{M}\ddot{X} + \mathcal{A}X = \mathcal{B}u,\ X(0) = X_0,\ \dot{X}(0) = X_1, \\
\\
\text{où nous avons posé:} \\
\\
\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M+2m & ml_1 & ml_2 \\ ml_1 & ml_1^2 & 0 \\ ml_2 & 0 & ml_2^2 \end{pmatrix} \ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & C-mg & 0 \\ 0 & 0 & C-mg \end{pmatrix} \\
\\
X = \begin{pmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{pmatrix},\ X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{pmatrix},\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

On ne demande pas de justifier les équations précédentes. Par ailleurs, toutes les réponses demandées font parties intégrantes du cours et il n'est donc pas nécessaire de trop s'étendre sur les explications. Il vous est cependant demandé de montrer que vous en avez compris les idées essentielles dans la rédaction.

L'objet de ce problème est de construire un contrôle exact du modèle qui ramène en un temps fini donné T une perturbation initiale arbitraire prise en compte par les vecteurs X_0 et X_1. Pour cela on passera à la limite dans le modèle de contrôle optimal lorsque le coût ε du contrôle tend vers zéro. Le critère de contrôle retenu est:

$$J^\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\big\{||X(T)||_2^2 + ||\dot{X}(T)||_2^2 + \varepsilon \int_0^T u^2(t)dt\big\}. \tag{2}$$

2 Caractérisation du contrôle optimal

Le contrôle optimal est défini comme solution (unique) du problème d'optimisation suivant ($\varepsilon > 0$):

$$\min_{v \in L^2(]0,T[)} J^\varepsilon(v). \tag{3}$$

- **Question 1** Montrer que la fonctionnelle J^ε est strictement convexe (on argumentera en s'appuyant sur le cours). Montrer que:

$$\lim_{||v||_{L^2(]0,T[)} \to \infty} J^\varepsilon(v) = \infty. \tag{4}$$

En déduire que (1) admet bien une solution unique dans l'espace $L^2(]0,T[)$ notée u^ε.

- **Question 2** Pour un contrôle u donné, on note X la solution de (1) et on introduit la fonction $t \to P(t) \in \mathbb{R}^3$ solution de:

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{P} + \mathcal{A}P = 0, \\ \\ P(T) = \mathcal{M}^{-1}\dot{X}(T),\ \dot{P}(T) = -\mathcal{M}^{-1}X(T). \end{cases} \tag{5}$$

  Montrer que résoudre (2) est équivalent à résoudre:

$$(\mathcal{B}, P(t))_3 + \varepsilon u(t) =^t \mathcal{B}P(t) + \varepsilon u(t) = 0,\ \forall t \in]0, T[, \tag{6}$$

  où X et P sont aussi solution de (1) et (5).

- **Question 3** Quelle(s) méthode(s) de résolution proposez vous pour ce système? (pensez à la méthode du gradient à pas constant ou optimal, voire celle du gradient conjugué).

3 Développement asymptotique formel

On pose *a priori*:

$$\begin{cases} u^\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots, \\ \\ X^\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + \dots, \\ \\ P^\varepsilon = P^0 + \varepsilon P^1 + \dots \end{cases} \tag{7}$$

où $(u^\varepsilon, X^\varepsilon, P^\varepsilon)$ est l'unique solution du système (1)-(5)-(6).

- **Question 4** En reportant (7)-(5)-(6) dans (1) et en identifiant les termes de même puissance en ε dans l'expression résultante, vérifier que formellement on doit nécessairement avoir:

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{X}^0 + \mathcal{A}X^0 = \mathcal{B}u^0,\ X^0(0) = X_0,\ \dot{X}^0(0) = X_1, \\ \\ \mathcal{M}\ddot{P}^0 + \mathcal{A}P^0 = 0,\ P^0(T) = \mathcal{M}^{-1}\dot{X}^0(T),\ \dot{P}^0(T) = -\mathcal{M}^{-1}X^0(T), \\ \\ (\mathcal{B}, P^0(t))_3 = 0\ \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{8}$$

  Déduire de (8) que la première composante de P^0 est identiquement nulle. Montrer que $P^0 = 0$ si et seulement si $l_1 \neq l_2$. Que se passerait-il si $l_1 = l_2$? Puis en introduisant cette information dans l'équation que doit nécessairement satisfaire P^0, établir que: $P^0(t) = 0\ \forall t \in [0, T]$. Expliquer finalement pourquoi, si u^0 existe, c'est nécessairement un contrôle exact.

- **Question 5** En exprimant l'éventuelle solution u^0 en fonction de P^1, donner l'équation dont X^0 doit être solution. On notera par ailleurs, que P^1 est complètement caractérisé par la connaissance de $\Phi_0 = P^1(0)$ et $\Phi_1 = \dot{P}^1(0)$. On notera (attention à la position des indices): $\Phi^{01} = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \\ \Phi_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$. On introduit ensuite: $\delta\Phi = \begin{pmatrix} \delta\Phi_0 \\ \\ \delta\Phi_1 \end{pmatrix}$ un vecteur arbitraire de $\mathbb{R}^6$, ainsi que δP la solution de:

$$\mathcal{M}\delta\ddot{P} + \mathcal{A}\delta P = 0,\ \delta P(0) = \delta\Phi_0,\ \delta\dot{P}(0) = \delta\Phi_1. \tag{9}$$

  Pour en terminer avec les notations, on pose (attention au signe!):

$$\Lambda(\Phi^{01}, \delta\Phi) = \int_0^T (\mathcal{B}P^1, \mathcal{B}\delta P)_3(t)dt,\ L(\delta\Phi) = (\mathcal{M}X_0, \delta\Phi_1)_3 - (\mathcal{M}X_1, \delta\Phi_0)_3. \tag{10}$$

  Montrez que le modèle variationnel suivant admet une solution unique pourvu que $L_1 \neq l_2$:

$$\text{trouver } \Phi^{01} \in \mathbb{R}^6,\ \text{tel que: } \forall \delta\Phi \in \mathbb{R}^6,\ \Lambda(\Phi^{01}, \delta\Phi) = L(\delta\Phi). \tag{11}$$

  En déduire que u^0 est parfaitement déterminé sous forme de conditions nécessaires.

- **Question 6** (Réciproque) On considère $u^0 \in L^2(]0,T[)$ obtenu précédemment. Montrer qu'avec ce choix de contrôle, on a donc:

$$\forall \delta\Phi = \begin{pmatrix} \delta\Phi_0 \\ \\ \delta\Phi_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6,\ (\mathcal{M}\dot{X}^0(T), \delta P(T))_3 - (\mathcal{M}X^0(T), \delta P(T))_3 = 0. \tag{12}$$

  Déduire que $u^0 \in L^2(]0,T[)$ est bien un contrôle exact.

- **Question 7** Soit $v \in L^2(]0,T[)$ et l'on suppose que v est aussi un contrôle exact (on sait qu'il y en a au moins un!) pour les données initiales X_0 et X_1 ainsi qu'un temps de contrôle T. Montrer que l'on a :

$$\int_0^T u^0(t)(v(t) - u^0(t))dt = 0. \tag{13}$$

  Conclure de cette relation que u^0 est le contrôle exact de l'espace $L^2(]0,T[)$ qui est de norme minimale (propriété de Tychonov). Pour cela on fera appel aux relations d'optimalité d'un problème d'optimisation sur un espace affine.

4 Convergence du contrôle optimal vers celui de Tychonov

- **Question 8** En remarquant que:

$$J^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) \leq J^{\varepsilon}(u^0), \tag{14}$$

déduire que le contrôle u^{ε} est uniformément borné dans l'espace $L^2(]0,T[)$ par rapport à ε. En déduire que l'on peut extraire une sous-suite notée $u^{\varepsilon'}$ qui converge au sens du produit scalaire de $L^2(]0,T[)$ (donc au sens faible dans cet espace) vers un élément u^* et que celui-ci est un contrôle exact qui vérifie:

$$\int_0^T |u^{\varepsilon'}(t) - u^*(t)|^2 \leq \int_0^T |u^*|^2(t)dt - 2\int_0^T u^{\varepsilon'}(t)u^*(t)dt + \int_0^T |u^*|^2(t)dt \tag{15}$$

ce qui en passant à la limite faible prouve que:

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} u^{\varepsilon'} \to u^* \text{ dans } L^2(]0,T[) \text{ fortement.}$$

- **Question 9** En déduire que:

$$\int_0^T |u^*|^2(t)dt \leq \int_0^T |u^0|^2(t)dt. \tag{16}$$

Puis expliquez pourquoi on a bien: $u^* = u^0$ en utilisant le résultat de la question 7.

5 Application numérique

- **Question 10** Ecrivez un programme dans le langage de votre choix permettant le calcul de u^0 et donnez quelques exemples en fonction de différentes conditions initiales. Mettre en évidence le fait que l'on perd la contrôlabilité si $l_1 = l_1$. Comment évoluent les résultats numériques si $K = C = 0$?

Pour intégrer les équations différentielles conduisant aux expressions de X^0 et P^1 on utilisera le schéma aux différences centrées de la forme suivante, par exemple pour l'équation (1) (voir cours):

$$\mathcal{M}\left(\frac{X^{n+1} - 2X^n + X^{n-1}}{\Delta t^2}\right) + \mathcal{A}X^n = \mathcal{B}u^n,\ X^0 = X_0,\ X^1 = X_0 + \Delta t X_1. \tag{17}$$

Bien entendu, pour calculer P^1 et δP en partant de $t = 0$ on fera pareil (mais sans second membre). La construction de la matrice 6×6 associée à la forme bilinéaire Λ se fera en utilisant une intégration numérique (formule des trapèzes) sur le segment $[0,T]$. Dans la pratique on mettra <u>au moins</u> 1000 points en temps, soit $\Delta t = T/1000$.