

Filtrage Particulaire

Nicolas PAUL

Séminaire de Statistique
Conservatoire National des Arts et Métiers
jeudi 2 Mars 2006

France-Télécom Recherche et Développement,
38 rue du Général Leclerc
92130 ISSY LES MOULINEAUX

Conservatoire National des Arts et Métiers,
laboratoire électronique et communications
292 rue saint martin, 75003 PARIS

Cnam

Plan de la présentation

- Contexte: Contrat Recherche Externe France Télécom / CNAM
 - application du filtrage particulaire dans les télécommunications
 - thèse Nicolas PAUL, sous la direction de Michel TERRE
- Cadre du filtrage particulaire
 - modèle
 - buts
 - exemples d'application
 - principe de l'estimation Bayésienne
- Principe du filtrage particulaire
 - qu'est-ce qu'une particule ?
 - l'algorithme « avec les mains »
 - initialisation des particules
 - propagation des supports des particules
 - mise à jour des poids des particules
 - dégénérescence et redistribution
 - prédiction
 - résumé

- Support Théorique
 - méthode de Monte-Carlo et loi des grands nombres
 - l'échantillonnage d'importance
 - génération récursive des trajectoires
 - mise à jour récursive des poids
 - seuil de redistribution
 - algorithme
 - complexité
- Exemples d'applications
 - le cas linéaire et gaussien
 - le cas multimodal

Cadre du filtrage particulière modèle

État dynamique:



Observations:

Modèle d'état (connu):

Distribution initiale: $p(x_0)$

Distribution de transition: $p(x_{k+1} / x_k)$

x_k est une chaîne de Markov:

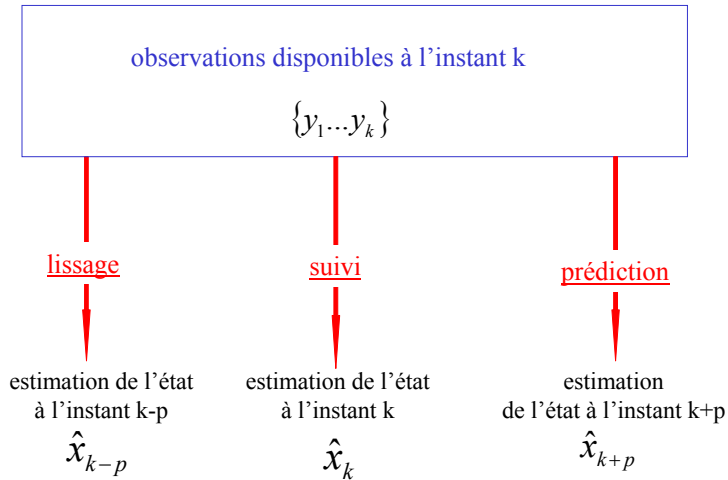
$$p(x_{k+1} / x_k, x_{k-1} \dots x_0) = p(x_{k+1} / x_k)$$

Modèle d'observation (connu):

Distribution de mesure: $p(y_k / x_k)$

Connaissant l'état, les observations sont indépendantes les unes des autres:

$$p(y_k / x_k, y_{k-1} \dots y_0) = p(y_k / x_k)$$

Cadre du filtrage particulaire
buts

5

Cadre du filtrage particulaire
résolution

Connaissance du système

Evolution de l'état:

x_k : vecteur d'état à l'instant k
 f_k : fonction d'évolution (connue)
 v_k : bruit d'évolution (statistique connue)
 reflète aussi l'incertitude sur le modèle

$$x_{k+1} = f_k(x_k, v_k)$$

Observation:

y_k : observation à l'instant k
 h_k : fonction d'observation (connue)
 u_k : bruit de mesure (statistique connue)
 reflète aussi l'incertitude sur le modèle

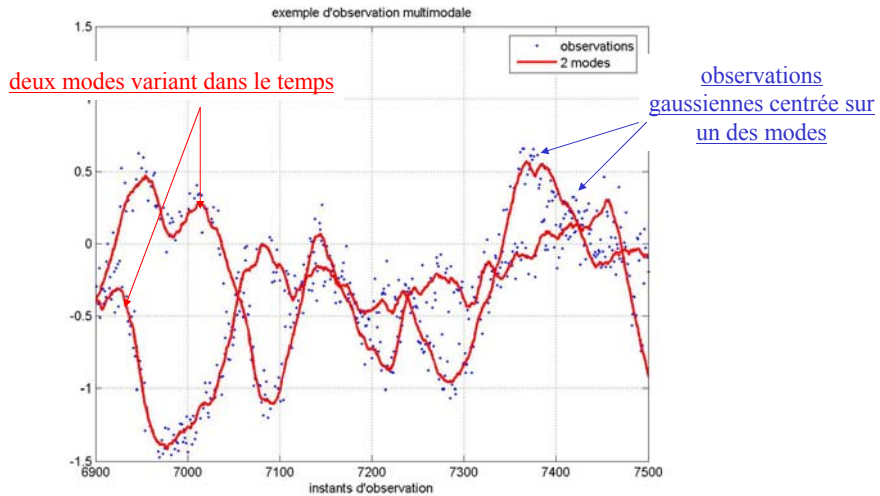
$$y_k = h_k(x_k, u_k)$$

Résolution [Gordon 2002]

- fonctions linéaires ou linéarisables & bruits gaussiens
 - Kalman (optimal) [Kalman 1960], Kalman étendu (linéarisation des fonctions) [Jaswinsky 1970]
- fonctions non linéaires et/ou bruits non-gaussiens
 - Grid-based methods (~parcours de treillis sur l'espace des états) [Bucy 1971], trop complexes
 - méthode de monte-carlo séquentielles - filtrage particulaire

6

Cadre du filtrage particulaire exemple: suivi d'un mélange de gaussienne



Buts = retrouver les deux modes à partir des observations

7

Cadre du filtrage particulaire applications [Bertozzi 2003]

- suivi de cible, guidage de missiles [Hue 2002] [Musso 2000]
- finances [Gewecke 1989]
- vision par ordinateur [Isard 1996]
- robotique [Thrun 2000]
- diagnostic médical [Berzuini 1997]
- bio informatique [Haan 2001]
- communications numériques
 - estimation conjointe donnée/canal [Djuric2003 Haykin2005 Bertozzi2004 BenSalem2002 Punskeya2004 Cheug2004 Brossier2004]
 - poursuite de la qualité du canal de propagation [Paul Terre 2005 (soumis)]
 - turbo estimation [le Ruyet Bertozzi Paul 2005]

8

Cadre du filtrage particulaire principe de l'estimation Bayésienne (1)

X: vecteur des paramètres à estimer

Y: observations disponibles

$$p(X/Y) \propto p(Y/X)p(X)$$

Vraisemblance (pointing to $p(Y/X)$)
Information a priori (pointing to $p(X)$)
Densité de probabilité a posteriori (pointing to $p(X/Y)$)

Rq: l'information a priori peut être très faible (exemple: « deux coordonnées successives de X sont proches »)

$$\text{Estimateur MMSE: } \hat{X}_{MMSE} = \int X \cdot p(X/Y) dX$$

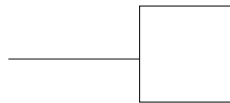
$$\text{Estimateur MAP: } \hat{X}_{MAP} = \arg \max \{p(X/Y)\}$$

9

Cadre du filtrage particulaire principe de l'estimation Bayésienne (2)

État dynamique:

$\{x_0 \dots x_k \dots\}$



Observations:

$\{y_0 \dots y_n \dots\}$

- Estimateur MMSE $\hat{x}_{0 \rightarrow k, MMSE} = \int \dots \int_{x_0 \dots x_k} x_{0 \rightarrow k} p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow n}) dx_0 \dots dx_k$

- Estimateur MAP $\hat{x}_{0 \rightarrow k, MAP} = \arg \max_{x_{0 \rightarrow k}} \{p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow n})\}$

$\Rightarrow$ Nécessité de connaître $p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow n})$

Bayes ?

$$p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow n}) = \frac{p(y_{1 \rightarrow n} / x_{0 \rightarrow k}) p(x_{0 \rightarrow k})}{p(y_{1 \rightarrow n})} \Rightarrow \text{incalculable en général}$$

10

Principe du filtrage particulaire

- à un instant k la densité de probabilité a posteriori de l'état sachant les mesures est approchée par une approximation discrète aléatoire
- cette approximation discrète est décrite par un ensemble de N particules, réparties dans les zones d'intérêt de l'espace des états (limite la complexité de la recherche)
- le support d'une particule représente une trajectoire possible de l'état
- le poids d'une particule représente l'estimation de la densité a posteriori en cette trajectoire

11

Principe du filtrage particulaire
qu'est-ce qu'une particule ?instant $k=0$:*indice de la particule $\{1, \dots, N\}$*

$$\{x_0^{(i)}, w_0^{(i)}\}$$

support
(vecteur)

poids

instant k :*indice de la particule $\{1, \dots, N\}$*

$$\{x_{0 \rightarrow k}^{(i)}, w_k^{(i)}\}$$

support = trajectoire testée
(trajectoire de vecteur)

poids = crédibilité de
la trajectoire testée

$$x_{0 \rightarrow k}^{(i)} = (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)})$$

12

Principe du filtrage particulaire qu'est-ce qu'une particule ? (2)

Qu'est-ce qu'un « dirac situé en une trajectoire » ???

$$\delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) = \delta(x_0 - x_0^{(i)}) \delta(x_1 - x_1^{(i)}) \dots \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

cette fonction de plusieurs variable $x_0 \dots x_k$:

$$\text{vaut } \infty \text{ si : } x_0 = x_0^{(i)}, \quad x_1 = x_1^{(i)} \quad \dots \quad x_k = x_k^{(i)}$$

vaut 0 sinon

on a:

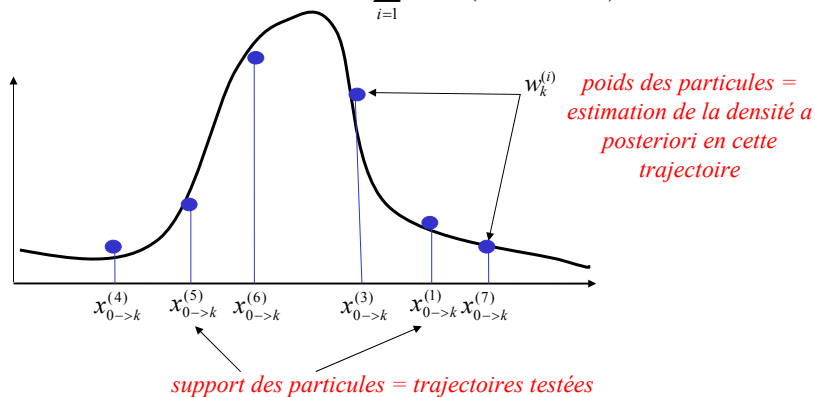
$$\int_{x_0} \dots \int_{x_k} \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) dx_0 \dots dx_k = 1$$

$$\int_{x_0} \dots \int_{x_{k-1}} \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) dx_0 \dots dx_{k-1} = \delta(x_k - x_k^{(i)})$$

13

Principe du filtrage particulaire qu'est-ce qu'une particule ? (3)

$$p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)})$$



14

Principe du filtrage particulaire modèles

- Modèle d'état

$$p(x_0) = N(0, \sigma_0)$$

$$p(x_{k+1}/x_k)$$

- Modèle d'observation

$$p(y_k/x_k)$$

15

Principe du filtrage particulaire initialisation des particules (k=0)

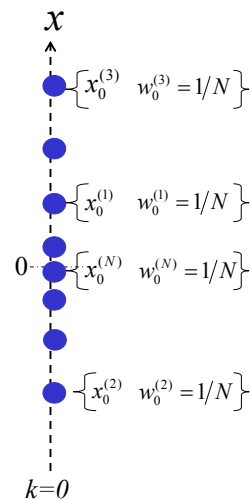
supports:

$$x_0^{(i)} \sim p(x_0)$$

$$p(x_0^{(i)} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

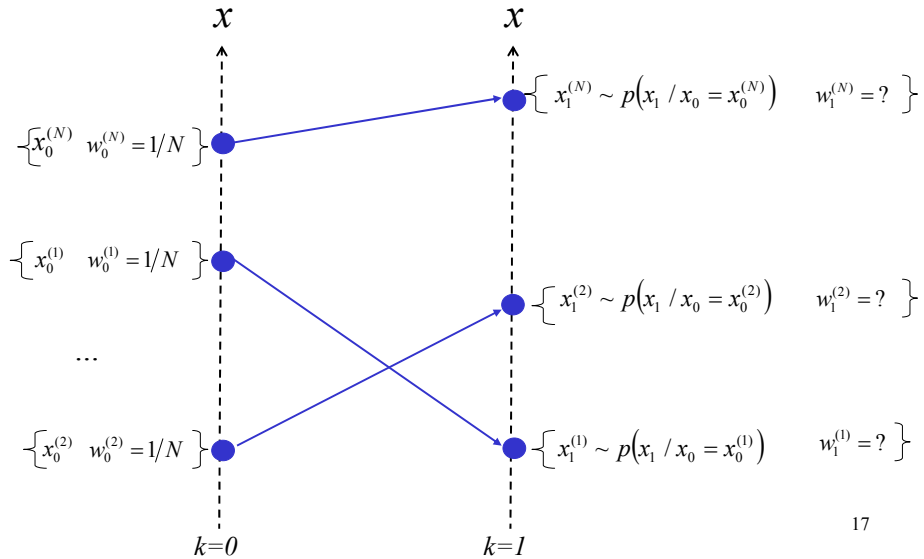
poids:

$$w_0^{(i)} = 1/N$$



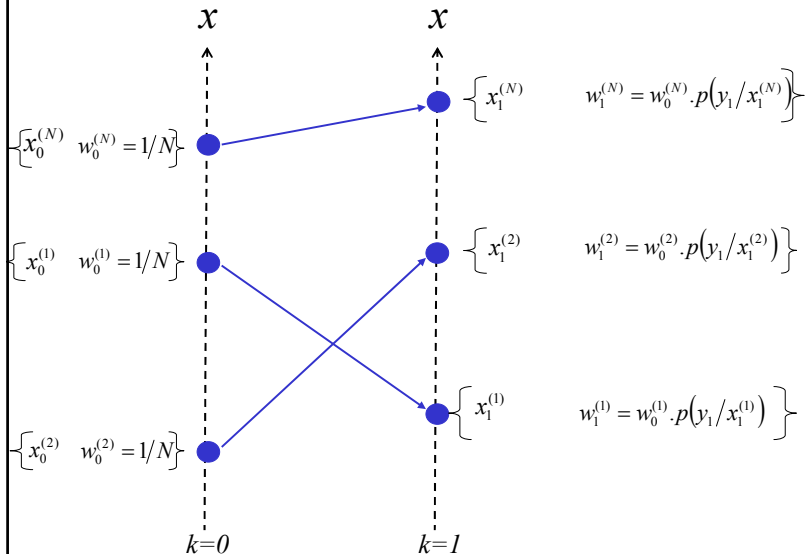
16

Principe du filtrage particulaire propagation des particules (k=1)



17

Principe du filtrage particulaire mise à jour des poids (k=1)



18

Principe du filtrage particulaire normalisation des poids (k=1)

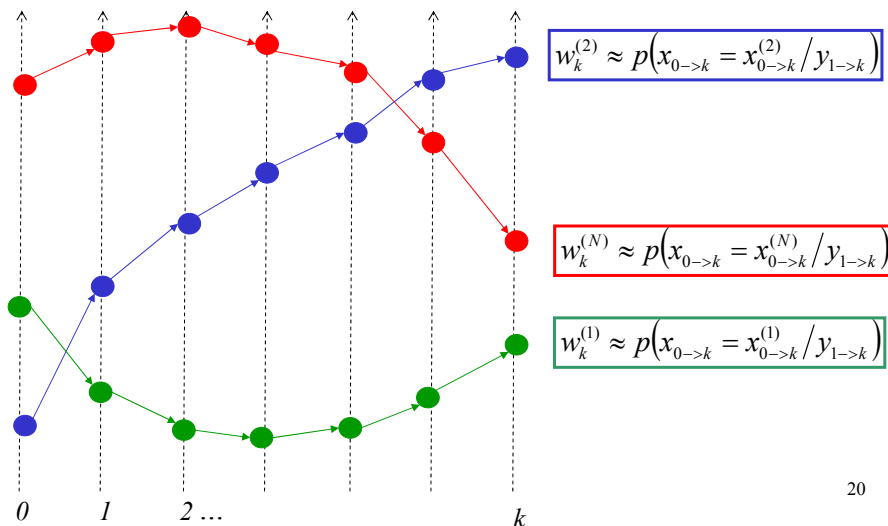
- normalisation des poids

$$S = \sum_{i=1}^N w_1^{(i)}$$

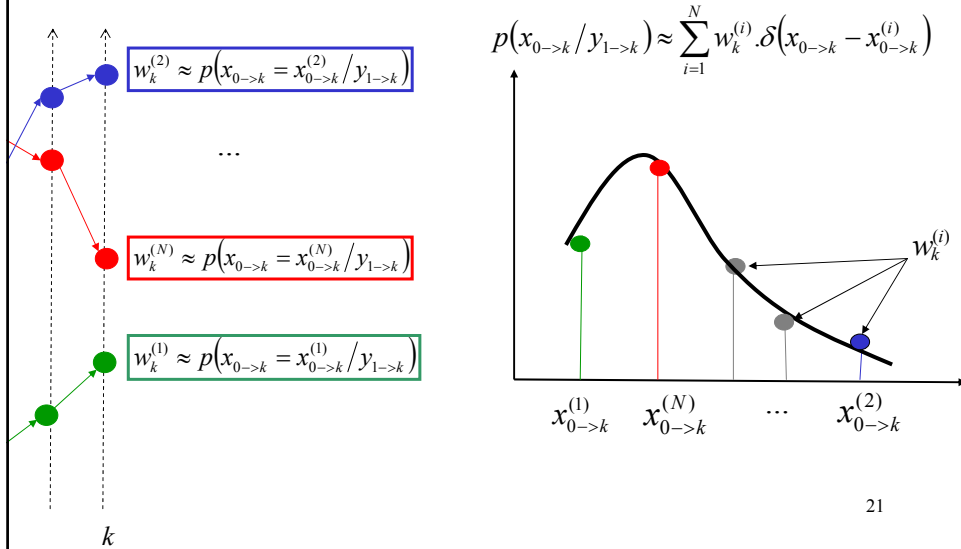
$$w_1^{(i)} := \frac{w_1^{(i)}}{S}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N w_1^{(i)} = 1$$

Principe du filtrage particulaire estimation de la densité de probabilité a posteriori



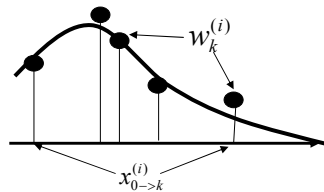
Principe du filtrage particulaire estimation de la densité de probabilité a posteriori (2)



21

Principe du filtrage particulaire estimation de la trajectoire du vecteur d'état

$$p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)})$$



estimateur MMSE:

$$\hat{x}_{0 \rightarrow k, MMSE} = \int \dots \int_{x_0} x_{0 \rightarrow k} p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) dx_k$$

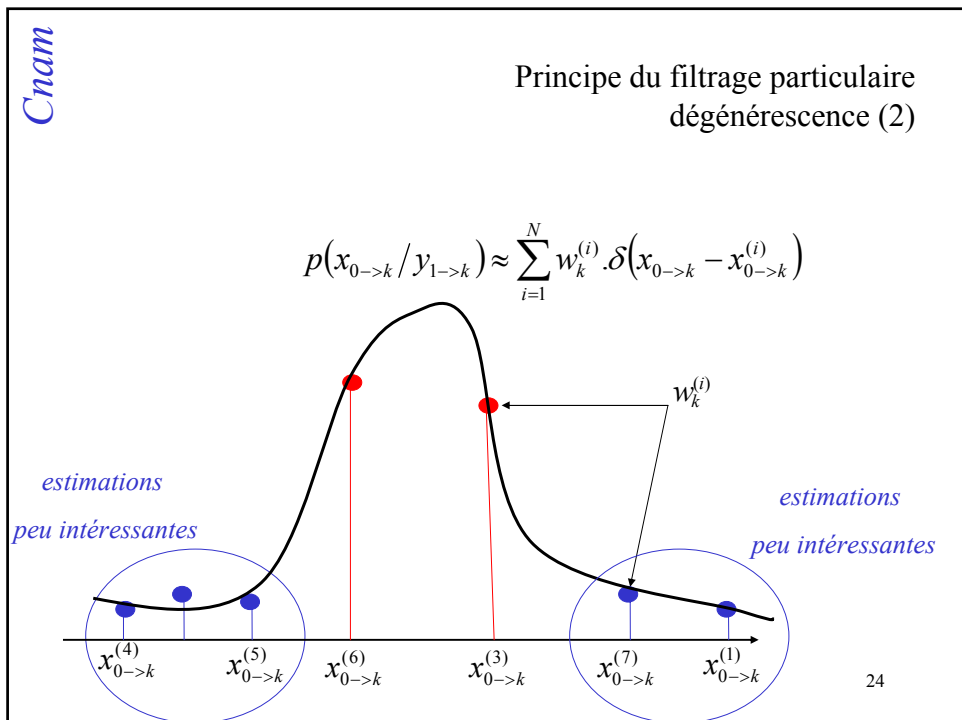
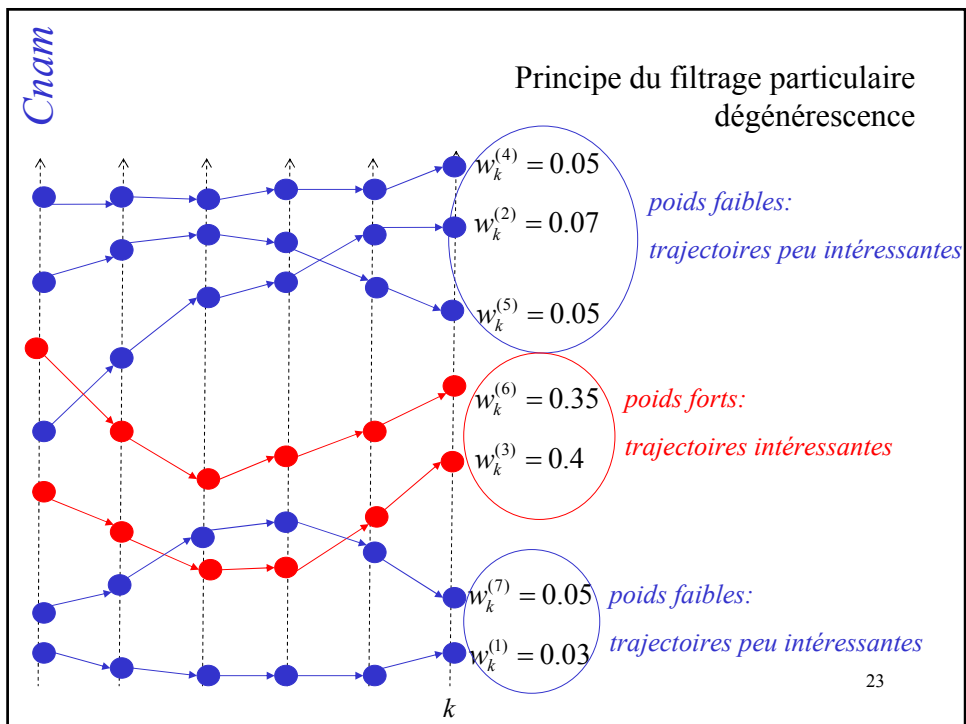
$$\Rightarrow \hat{x}_{0 \rightarrow k, MMSE} \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_{0 \rightarrow k}^{(i)}$$

estimateur MAP:

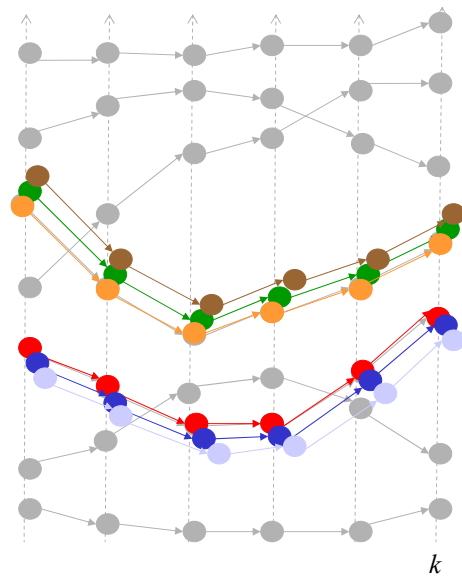
$$\hat{x}_{0 \rightarrow k, MAP} = \arg \max_{x_{0 \rightarrow k}} \{p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})\}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{0 \rightarrow k, MAP} \approx x_{0 \rightarrow k}^{(j)} \mid w_k^{(j)} = \max_i \{w_k^{(i)}\}$$

22



Support et poids des trajectoires avant redistribution:



Principe du filtrage particulaire redistribution

$$w_k^{(4)} = 0.05$$

poids faibles:

$$w_k^{(2)} = 0.07$$

trajectoires peu intéressantes

$$w_k^{(5)} = 0.05$$

$$w_k^{(6)} = 0.35$$

poids forts:

$$w_k^{(3)} = 0.4$$

*trajectoires intéressantes**poids des trajectoires**après redistribution:*

$$\forall i: w_k^{(i)} = \frac{1}{N}$$

$$w_k^{(7)} = 0.05$$

$$w_k^{(1)} = 0.03$$

*poids faibles:**trajectoires peu intéressantes*

25

Principe du filtrage particulaire redistribution (2)

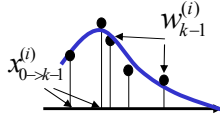
- Exemple d'algorithme

si $w_k^{(i)} < 1/N$: éliminer $x_{0 \rightarrow k}^{(i)}$

si $w_k^{(i)} > 1/N$: reproduire $x_{0 \rightarrow k}^{(i)}$ $[N \cdot w_k^{(i)}]$ fois

Principe du filtrage particulaire résumé

estimation à l'instant $k-1$



$\{x_{0->k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N}$
approximation
discrète de
 $p(x_{0->k-1} / y_{1->k-1})$

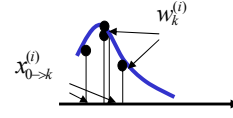
- Génération des supports $\{x_k^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N}$
- Mise à jour des poids $w_k^{(i)}$
- Redistribution éventuelle des particules

Observations
 $\{y_1 \dots y_k\}$

Connaissance
modèle
d'observation
 $p(y_k / x_k)$

Connaissance
modèle
d'évolution
 $p(x_k / x_{k-1})$

estimation à l'instant k



$\{x_{0->k}^{(i)}, w_k^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N}$
Approximation
discrète de
 $p(x_{0->k} / y_{1->k})$

27

Support théorique loi des grands nombres et méthode de Monte-Carlo

- soit $p(x)$ une densité de probabilité et $h(x)$ une fonction quelconque
- la méthode de Monte Carlo permet d'estimer $E_p\{h(x)\} = \int_x h(x)p(x)dx$ à partir d'un ensemble de variables aléatoires générées selon $p(x)$:

$$\{x^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim p(x)$$

- loi des grands nombres:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_p\{h(x)\}$$

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta(x - x^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p(x)$$

$$\left\{x^{(i)}, w^{(i)} = \frac{1}{N}\right\}_{i=1 \rightarrow N} : \text{approximation discrète de } p(x)$$

28

Support théorique loi des grands nombres et méthode de Monte-Carlo (2) exemple

- estimation de la moyenne ($h(x) = x$)

$$E_{p(x)}\{x\} = \int_x x \cdot p(x) dx$$

$$\hat{E}_p\{x\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)}$$

- estimation du moment d'ordre 2 ($h(x) = x^2$)

$$E_{p(x)}\{x^2\} = \int_x x^2 \cdot p(x) dx$$

$$\hat{E}_{p(x)}\{x^2\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^{(i)})^2$$

29

Support théorique échantillonnage selon l'importance

- si on ne sait pas générer de variables selon $p(x)$, on peut utiliser une autre fonction:

$$\{x^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim \pi(x) \quad \begin{array}{l} \text{« fonction d'importance »} \\ \text{- plus facile à utiliser que } p(x) \\ \text{- son support doit contenir le support de } p(x) \end{array}$$

$$E_p\{h(x)\} = \int_x \left(\frac{h(x)p(x)}{\pi(x)} \right) \pi(x) dx = E_\pi \left\{ \frac{h(x)p(x)}{\pi(x)} \right\}$$

- loi des grands nombres

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w^{(i)} h(x^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_p\{h(x)\} \quad \text{avec : } w^{(i)} = \frac{p(x^{(i)})}{\pi(x^{(i)})}$$

$$P_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w^{(i)} \delta(x - x^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p(x)$$

$$\left\{ x^{(i)}, \frac{w^{(i)}}{N} \right\}_{i=1 \rightarrow N} : \text{approximation discrète de } p(x)$$

30

Support théorique échantillonnage selon l'importance (2)

- si on ne dispose que d'une expression analytique non normalisée: $\tilde{p}(x) \left(p(x) = \tilde{p}(x) / \int_{\mathbb{Z}} \tilde{p}(z) dz \right)$

$$\{x^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim \pi(x)$$

$$E_p \{h(x)\} = \int_x \frac{h(x)}{\pi(x)} p(x) \pi(x) dx = \int_x \frac{h(x)}{\pi(x)} \frac{\tilde{p}(x)}{\int_{\mathbb{Z}} \frac{\tilde{p}(z)}{\pi(z)} \pi(z) dz} \pi(x) dx$$

$$E_p \{h(x)\} = \frac{\int_x \frac{h(x)}{\pi(x)} \tilde{p}(x) \pi(x) dx}{\int_{\mathbb{Z}} \frac{\tilde{p}(z)}{\pi(z)} \pi(z) dz} = \frac{E_{\pi} \left\{ \frac{\tilde{p}(x)}{\pi(x)} h(x) \right\}}{E_{\pi} \left\{ \frac{\tilde{p}(x)}{\pi(x)} \right\}}$$

- loi des grands nombres (appliquée au numérateur et au dénominateur)

$$\frac{\sum_{i=1}^N w^{(i)*} h(x^{(i)})}{\sum_{j=1}^N w^{(j)*}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_p \{h(x)\} \quad \text{avec } w^{(i)*} = \frac{\tilde{p}(x^{(i)})}{\pi(x^{(i)})}$$

$$\sum_{i=1}^N w^{(i)} h(x^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_p \{h(x)\} \quad \text{avec } w^{(i)} = w^{(i)*} / \sum_{j=1}^N w^{(j)*}$$

31

Support théorique loi des grands nombres et méthodes de Monte-Carlo (3) ...pour une trajectoire

- soient $p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$ une densité de probabilité de trajectoire et $h(x_{0 \rightarrow k})$ une fonction
- comment estimer $E_{p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})} \{h(x_{0 \rightarrow k})\} = \int_{x_0} \dots \int_{x_k} h(x_{0 \rightarrow k}) p(x_{0 \rightarrow k}) dx_0 \dots dx_k$?
- si on pouvait générer un grand nombre N de trajectoires selon: $\{x_{0 \rightarrow k}^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$
- ... alors, d'après la loi des grands nombres:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})} \{h(x_{0 \rightarrow k})\}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$$

$$\left\{ x_{0 \rightarrow k}^{(i)}, w_k^{(i)} = \frac{1}{N} \right\}_{i=1 \rightarrow N} : \text{approximation discrète de } p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$$

32

Support théorique échantillonnage selon l'importance (3) ... pour une trajectoire

- si on ne sait pas générer de variables selon $p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$ on peut utiliser une autre fonction:

$$\{x_{0 \rightarrow k}^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim \pi(x_{0 \rightarrow k} / y_{0 \rightarrow k}) \quad \text{fonction d'importance décrivant la distribution des supports, éventuellement fonction des observations}$$

$$w_k^{(i)*} = \frac{\tilde{p}(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}{\pi(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})} \quad w_k^{(i)} = w_k^{(i)*} / \sum_{j=1}^N w_k^{(j)*} \quad \tilde{p} : \text{expression analytique non normalisée de } p$$

- loi des grands nombres:

$$\sum_{i=1}^N w_k^{(i)} h(x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E_{p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})} \{h(x_{0 \rightarrow k})\}$$

$$\sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \delta(x - x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p(x_{0 \rightarrow k} / y_{0 \rightarrow k})$$

$$\{x_{0 \rightarrow k}^{(i)}, w_k^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} : \text{approximation discrète de } p(x_{0 \rightarrow k} / y_{0 \rightarrow k})$$

33

Support théorique filtrage particulaire : mise à jour de l'approximation discrète

instant k-1:

$$\left\{ x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k-1})}{\pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k-1})} \right\}_{i=1 \rightarrow N} \quad \text{approximation discrète de } p(x_{0 \rightarrow k-1} / y_{1 \rightarrow k-1})$$

Génération récursive de N nouvelles trajectoires

$$\begin{cases} x_k^{(i)} \sim \pi(x_k / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k}) \\ x_{0 \rightarrow k}^{(i)} = \{x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}\} \end{cases}$$

Mise à jour des N poids par récurrence ($w_k^{(i)}$ fonction de $w_{k-1}^{(i)}$)

instant k:

$$\left\{ x_{0 \rightarrow k}^{(i)}, w_k^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}{\pi(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})} \right\}_{i=1 \rightarrow N} \quad \text{approximation discrète de } p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$$

34

Support théorique génération récursive de trajectoire

- trajectoires générées à l'instant k-1:

$$x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} \sim \pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k-1})$$

- la trajectoire (i) à l'instant k est générée à partir de la trajectoire (i) à l'instant k-1:

$$x_k^{(i)} \sim \pi(x_k / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k})$$

$$x_{0 \rightarrow k}^{(i)} = \{x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, x_k^{(i)}\}$$

$$x_{0 \rightarrow k}^{(i)} \sim \pi(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) = \pi(x_k / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k}) \cdot \pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k-1})$$

35

Support théorique mise à jour récursive des poids

$$w_{k-1}^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k-1})}{\pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k-1})} \xrightarrow{\text{quelle récurrence ?}} w_k^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k})}{\pi(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k})}$$

On montre que (Bayes): $p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) = p(x_{0 \rightarrow k-1} / y_{1 \rightarrow k-1}) \cdot \frac{p(x_k / x_{k-1}) \cdot p(y_k / x_k)}{p(y_k / y_{1 \rightarrow k-1})}$

D'où: $w_k^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k-1})}{\pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k-1})} \times \frac{p(x_k^{(i)} / x_{k-1}^{(i)}) \cdot p(y_k / x_k^{(i)})}{\pi(x_k^{(i)} / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k})}$

$w_{k-1}^{(i)}$

Ainsi: $w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \cdot \frac{p(x_k^{(i)} / x_{k-1}^{(i)}) \cdot p(y_k / x_k^{(i)})}{\pi(x_k^{(i)} / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k})}$

36

Support théorique mise à jour récursive des poids (2)

Souvent, seul le modèle d'évolution est utilisé pour générer les trajectoires

$$\pi(x_k / x_{1 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k}) = p(x_k / x_{k-1}^{(i)}) \text{ (fonction d'importance « prior »)}$$

$$\Rightarrow w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \cdot p(y_k / x_k^{(i)})$$

- génération simple des supports
- mise à jour simple des poids
- sous optimale (génération des supports indépendant de l'observation => beaucoup de redistributions)
- la fonction d'importance optimale définie comme minimisant la variance des poids (et donc le nombre de redistributions) est:

$$\pi(x_k / x_{1 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k}) = p(x_k / x_{k-1}^{(i)}, y_k)$$

37

Support théorique seuil de redistribution

- le coefficient de variations traduit la dispersion des poids

$$\text{var}(w_k^{(i)}) = \frac{E(w_k^{(i)2}) - E^2(w_k^{(i)})}{E^2(w_k^{(i)})}$$

- Neff: nombre de particules efficaces ($\approx$ dans une zone intéressante de l'espace des états) [Liu 1996]

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{var}(w_k^{(i)})} \text{ plus les poids sont dispersés, plus le nombre de particules intéressantes est faible}$$

$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^{(i)})^2}$$

- seuil de redistribution

$$\hat{N}_{\text{eff}} < S \Rightarrow \text{redistribution} \quad \left(S = \frac{N}{5}, \frac{N}{10}, \dots \right)$$

38

Support théorique algorithme

A l'instant $k=0$:

- initialisation des supports des particules: $\{x_0^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim p(x_0) \quad \{w_0^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} = 1 / N$

A la réception de la mesure y_k :

- propagation du support de chaque particule (i) : $\{x_k^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim \pi(x_k / x_{0 \rightarrow k-1}, y_{0 \rightarrow k})$
- mises à jour du poids de chaque particule (i) : $w_k^{(i)*} = w_{k-1}^{(i)*} \cdot \frac{p(y_k / x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)} / x_{k-1}^{(i)})}{\pi(x_k / x_{0 \rightarrow k-1}, y_{0 \rightarrow k})}$
- estimation de l'état $\hat{x}_{k,MMSE} = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_k^{(i)}$ $w_k^{(i)} = w_k^{(i)*} / \sum_{i=1}^N w_k^{(i)*}$
- redistribution éventuelle des particules
$$\text{Si: } \left(\sum_{i=1}^M (w_k^{(i)})^2 \right)^{-1} < S : \begin{cases} p(x_{0 \rightarrow k}^{(i) \text{ new}} = x_{0 \rightarrow k}^{(j) \text{ old}}) = w_k^{(j) \text{ old}} \\ w_k^{(i) \text{ new}} = 1 / N \end{cases} \quad 39$$

Support théorique complexité

A l'instant $k=0$:

- initialisation des supports des particules: $O(N)$

N : nombre de particules

A la réception de la mesure y_k :

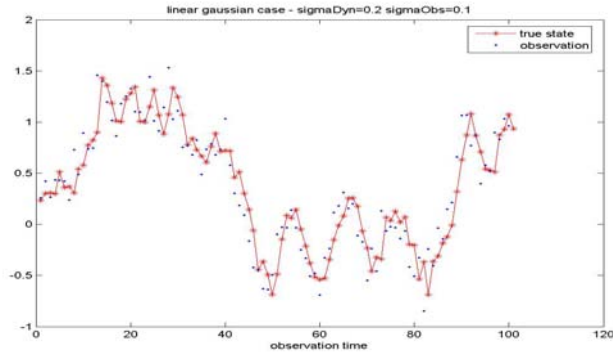
- propagation du support de chaque particule (i) : $O(N)$
- mises à jour du poids de chaque particule (i) : $O(N)$
- estimation de l'état $O(N)$
- redistribution éventuelle des particules $O(N)$

Version « naïve »: $O(N \log(N))$

Exemple d'application le cas linéaire et gaussien

Modèle d'évolution: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_k \\ v_k = N(0, 0.2) \end{cases}$ $p(x_{k+1}/x_k) = N(x_k, 0.2)$

Modèle d'observation: $\begin{cases} y_k = x_k + u_k \\ u_k = N(0, 0.1) \end{cases}$ $p(y_k/x_k) = N(x_k, 0.1)$



41

N : nombre de particules=100
Fonction d'importance « prior »
 S : seuil de redistribution= $N/10$

Cas linéaire et gaussien algorithme

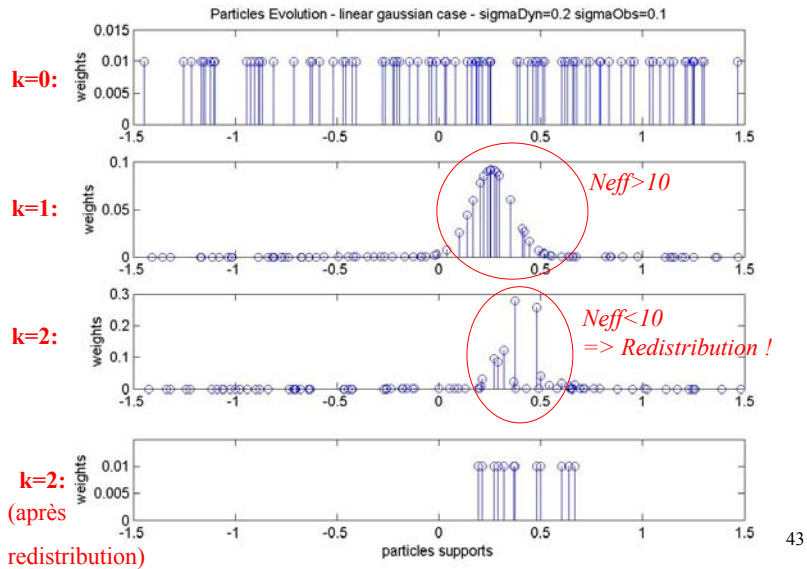
A l'instant k=0:

- initialisation des supports et poids des particules: $\{x_0^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim N(0, 1)$
 $\{w_0^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} = 1 / N$

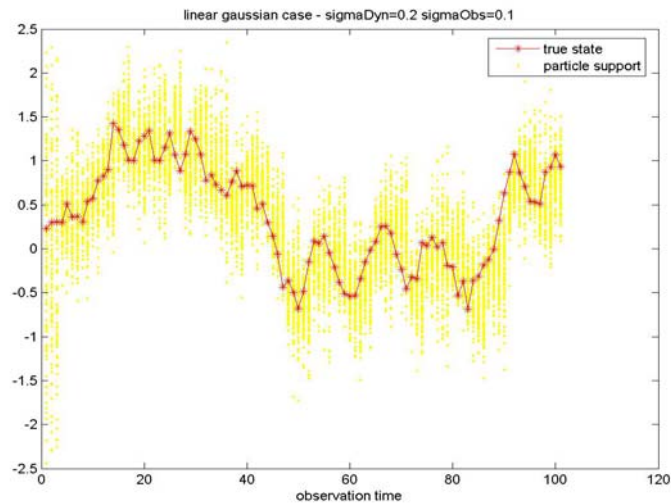
A la réception de la mesure y_k :

- propagation du support de chaque particule (i) : $\{x_k^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim N(x_{k-1}^{(i)}, 0.2)$
- mises à jour du poids de chaque particule (i) : $w_k^{(i)*} = w_{k-1}^{(i)*} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.1}} \exp\left(-\frac{(y_k - x_k^{(i)})^2}{2 \cdot 0.1^2}\right)$
 $w_k^{(i)} = w_k^{(i)*} / \sum_{i=1}^N w_k^{(i)*}$
- estimation de l'état $\hat{x}_{k, MMSE} = \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_k^{(i)}$
- redistribution éventuelle des particules
 Si: $\left(\sum_{i=1}^N (w_k^{(i)})^2 \right)^{-1} < S$: $\begin{cases} p(x_{0 \rightarrow k}^{(i) \text{ new}} = x_{0 \rightarrow k}^{(j) \text{ old}}) = w_k^{(j) \text{ old}} \\ w_k^{(i) \text{ new}} = 1 / N \end{cases}$ 42

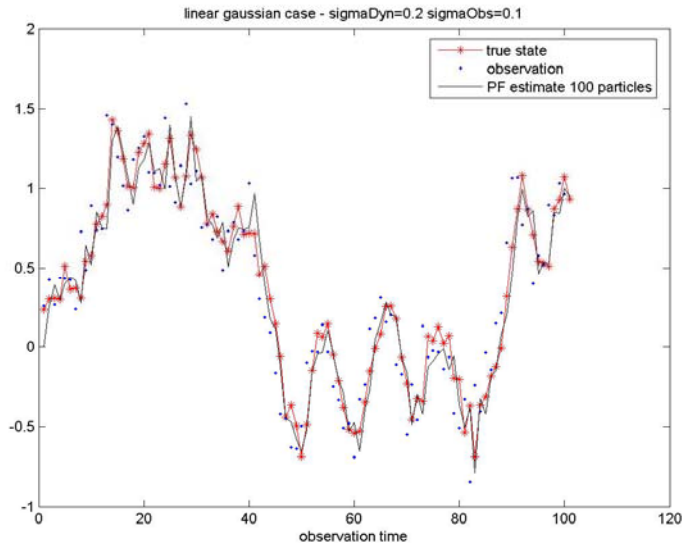
Cas linéaire et gaussien évolution des particules



Cas linéaire et gaussien évolution des particules (2)



Cas linéaire et gaussien performances



Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes modèle

Évolution de deux modes
Modèle AR simple

$$\begin{cases} x_1[k+1] = \sum_{l=0}^5 a_l x_1[k-l] + v_1[k] \\ x_2[k+1] = \sum_{l=0}^5 a_l x_2[k-l] + v_2[k] \end{cases}$$

$$v_1[k] \sim N(0, 0.0126) \quad v_2[k] \sim N(0, 0.0126)$$

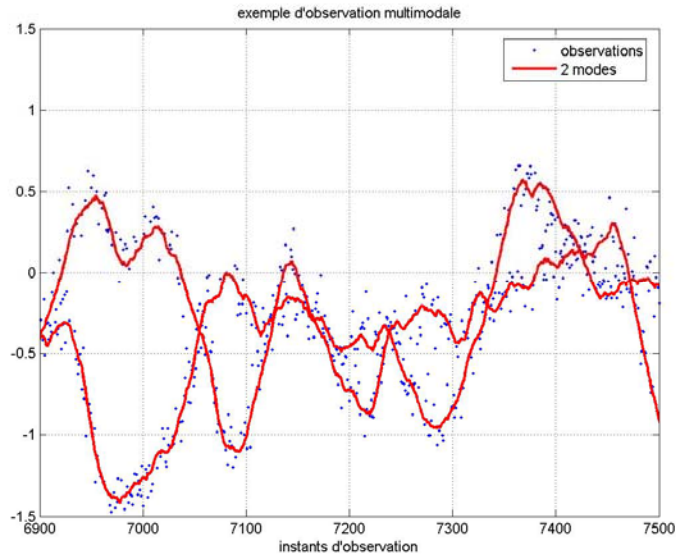
$$[a_0, \dots, a_5] = [1 \ -1.2226 \ 0.0017 \ 0.0015 \ 0.0013 \ 0.2196]$$

$x_j[k]$: signal basse fréquence de fréquence réduite < 0.005

A chaque instant k on observe un des deux modes avec une erreur gaussienne:

$$\begin{cases} y[k] = \theta[k]x_1[k] + (1 - \theta[k])x_2[k] + \sigma.u[k] \\ \theta[k] \in \{0, 1\}, \quad p(\theta[k] = 0) = p(\theta[k] = 1) = 0.5 \\ u[k] = N(0, 1) \end{cases}$$

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes exemple de signal observé



47

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes connaissance & buts de l'estimateur

Connue de l'estimateur:

- la probabilité que l'observation vienne d'un des mode ($p(\theta[k]=0)=0.5$)
- forme gaussienne du bruit d'observation (mais la variance est inconnue)

Inconnus de l'estimateur:

- le mode vraiment observé à un instant k (valeur de $\theta[k]$)
- la variance du bruit d'observation (σ)
- le modèle d'évolution des modes (ie les paramètres AR)

On cherche à estimer et suivre:

- les deux modes $x_1[k]$ $x_2[k]$
- l'écart-type du bruit σ

48

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes modèle supposé par l'estimateur

Définition du vecteur d'état:

$$x[k] = (x_1[k] \quad x_2[k] \quad \sigma[k])^T$$

Modèle d'évolution:

$$p(x[k+1]/x[k]) = (N(0, \beta) \quad N(0, \beta) \quad N(0, \lambda))^T$$

Modèle d'observation:

$$p(y[k]/x[k]) = \sum_{\theta[k]} p(y[k], \theta[k]/x[k])$$

$$p(y[k]/x[k]) = \frac{0.5}{\sqrt{2\pi} \sigma[k]} \left(\exp\left\{-\frac{(y[k]-x_1[k])^2}{2\sigma^2[k]}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y[k]-x_2[k])^2}{2\sigma^2[k]}\right\} \right)$$

Dynamique:

*hypothèses sur la vitesse de
variation des paramètres*

On choisit: $\beta=0.05$ $\lambda=0.005$

49

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes initialisation de l'algorithme

A l'instant k=0:

Initialisation des supports (Gaussienne):

$$x^{(i)}[0] = \begin{pmatrix} x_0^{(i)}[0] \\ x_1^{(i)}[0] \\ \sigma^{(i)}[0] \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N(0,1) \\ N(0,1) \\ N(0,1) \end{pmatrix}$$

*N: nombre de particules=100
Fonction d'importance « prior »
S: seuil de redistribution=N/10*

Initialisation des poids:

$$w^{(i)}[0] = 1 / N$$

50

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes algorithme (1)

A la réception de la mesure y_k :

1. propagation des supports:

$$x^{(i)}[k+1] = x^{(i)}[k] + (N(0, \beta) \quad N(0, \beta) \quad N(0, \lambda))' \quad x_{0 \rightarrow k}^{(i)} = (x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, x^{(i)}[k])$$

2. mise à jour des poids:

$$w^{(i)}[k] = w^{(i)}[k-1] \frac{0.5}{\sqrt{2\pi} \sigma[k]} \left(\exp\left\{-\frac{(y[k] - x_1[k])^2}{2\sigma^2[k]}\right\} + \exp\left\{-\frac{(y[k] - x_2[k])^2}{2\sigma^2[k]}\right\} \right)$$

Normalisation:

$$S = \sum_{i=1}^N w^{(i)}[k]. \quad \text{for } i=1 \rightarrow n: w^{(i)}[k] = w^{(i)}[k]/S$$

3. estimation de l'état (modes et écart-type):

$$\hat{x}[k] = \sum_{i=1}^N w^{(i)}[k] x^{(i)}[k]$$

51

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes algorithme (2)

4. Re distribution

$$Si: \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w^{(i)}[k])^2} < S$$

Redistribue chaque particule (i) de telle sorte que:

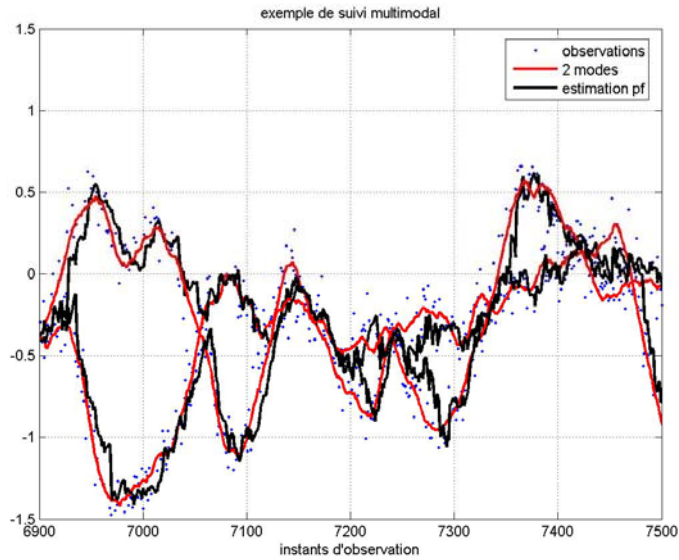
$$p(x_{0 \rightarrow k}^{(i), new} = x_{0 \rightarrow k}^{(j)}) = w^{(j)}[k]$$

Mise à jour des poids (i):

$$w_t^{(i), new} = \frac{1}{N}$$

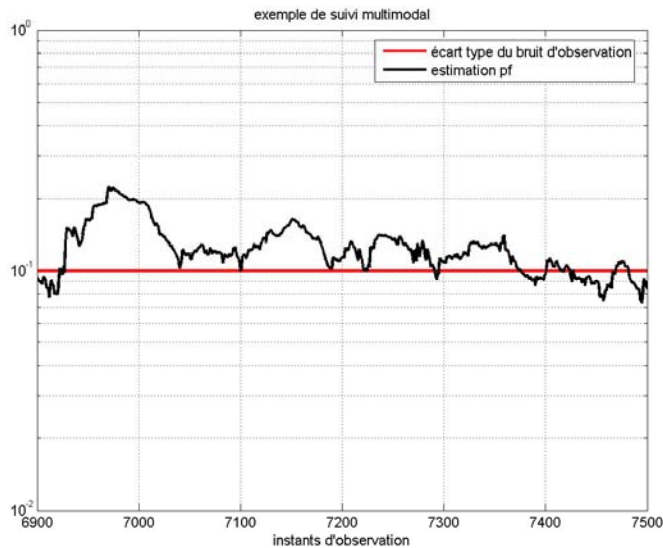
52

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes performances



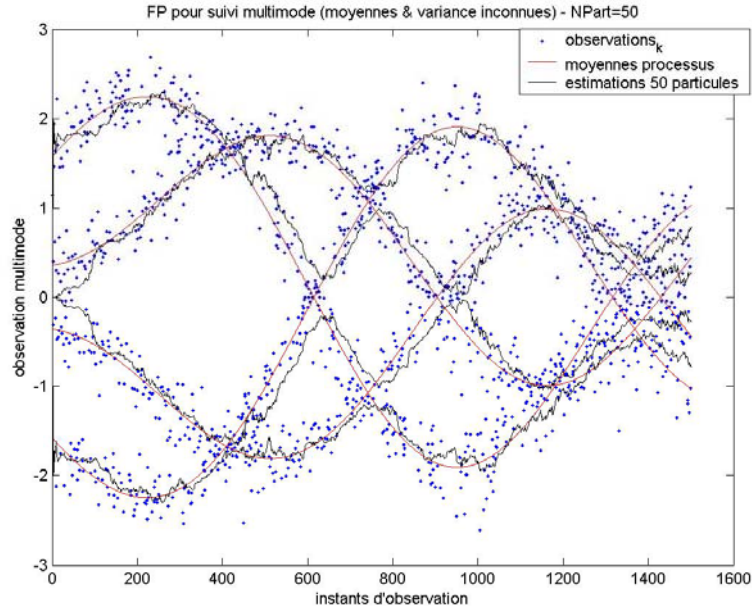
53

Cas multimodal – suivi d'un mélange de gaussiennes performances (2)



54

Cas multimodal – mélange de 4 gaussiennes complexes



Bibliographie généralité & théorie

[Briers 2005] “Smoothing algorithms for state space models” M Briers, A. Doucet, S. Maskell, *submitted to IEEE Transaction on Signal Processing in 2005*

[Doucet 2000] “On sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering” A. Doucet, C. Godsill, C. Andrieu, *Signal Processing Group, Department of Engineering, University of Cambridge, Statistics & Computing, 2000*

[Doucet 2001] “Sequential Monte Carlo Methods in Practice” Doucet, N. de Freitas, N. Gordon *Statistics For Engineering and Information Science, Ed. Springer, 2001*

[Gordon 2002] “A Tutorial on Particle Filters for Online Non-Linear / Non-Gaussian Bayesian Tracking” N. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, *IEEE Transactions on signal processing, vol 50, No 2, February 2002*

[Kitagawa 1987] “Non Gaussian State Space Modelling of Non-Stationary Time Series” G. Kitagawa, *Journal of the American Statistical Association 82: 1032-1063*

Bibliographie généralité & théorie (2)

[Kitagawa 1991] “a Non Linear Smoothing Methods for Time Series Analysis” G. Kitagawa *Statistica Sinica* 1(1991), 371-388

[Le Gland 2003] “Filtrage Particulaire” F. Campillo, F. Le Gland, *Formation Sagem, Argenteuil, Juin/Juillet 2003 INRIA / IRISA*

[Liehn-Schioler 2004] « Parzen Particle Filter » T. Liehn-Schioler D. Erdogmus J. Principe *Proceedings of ICASSP 2004*

[Liu 1996] “Metropolized Independent Sampling with Comparison to Rejection Sampling and Importance Sampling” JS Liu *Statistics and Computing* 6:113-116

Bibliographie historique

[Bucy 1971] “ Digital Synthesis of nonlinear filters” R.S Bucy K.D. Senne *Automatica*, 7:287-298, 1971

[Geman 1984] “Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6:721-741, 1984

[Gordon 1993] “Bayesian methods for tracking” *PhD thesis, University of London*, 1993

[Hastings 1970] “Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications” *Biometrika* 57:97-109, 1970

[Jaswinsky 1970] “Stochastic processes and filtering theory” *Academic Press*, 1970

[Kalman 1960] "a new approach in linear filtering and prediction problems" *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, vol D82, pp 35-45

[Marshall 1956] "The use of multi-stage sampling schemes in Monte-Carlo computations" *M. Meyer (eds), Symposium on Monte-Carlo methods, John Wiley, New York, p. 123-140, 1956*

[Salut 1989] "The non-linear theme in automatics and signal processing", *National Days of GDR on image and signal processing, Chantilly, September 1989*

[Sorenson 1971] "Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums" *Automatica*, 7:465-479, 1971

[Von Neumann 1951] "Various techniques used in connection with random digits" *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 12:36-38, 1951*

[Ben Salem 2002] « Réception particulière pour canaux multi-trajets évanescents en communications radiomobiles » F. Ben Salem, *Rapport de thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2002*

[Bertozzi 2003] "Application of Particle Filtering Methods to Digital Communications" T. Bertozzi, *rapport de thèse, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, novembre 2003*

[Brossier2004] « Particulière et Communications Numériques » JM Brossier, PO Amblard, *journées SEE au CNAM, 18 Juin 2004*

[Cheug 2004] « Global Sampling for Sequential Filtering over Discrete State Space » P. Cheung-Mon-Chan E. Moulines *Eurasip Journal on Applied Signal Processing, Vol 2004, No 15, 1st November 2004*

[Djuric 2003] "Particle Filtering, a review of the theory and how it can be used for solving problems in wireless communications" P. Djuric et al, *IEEE Signal Processing Magazine, 2003*

Bibliographie applications aux communications numériques (2)

[Haykin 2005] « Cognitive Radio: Brain Empowered Wireless Communications » S. Haykin *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* vol. 23 no 2, February 2005

[Le Ruyet 2006 (soumis)] « Particle Filtering for Iterative Data and Phase Estimation » D. Le Ruyet, T. Bertozzi, N. Paul, soumis *ICASSP 2006*

[Paul 2006 (soumis)] « Blind Channel Taps and Noise Tracking in a two Fading Taps Channel: comparison of a Particle Filter with a Moment based method » N Paul, M. Terre, soumis à *ICASSP 2006*

[Punskeya 2004] « Particle Filter for Joint Symbol and Code Delay Estimation in DS Spread Spectrum Systems in Multipath Environment » A. Punskeya, A. Doucet, W. Fitzgerald, *Journal on Applied Signal Processing, Vol 2004, No 15, 1st November 2004*

Bibliographie applications diverses

[Berzuini 1997] “Dynamic Conditional Independence Models and Markov Chain Monte Carlo Method” G. Berzuini, N. G. Best, W. R. WGilks, C. Larizza *Journal of the American Statistical Association* 92:1403-1412, 1997

[Djuric 2004] “Special Issue on Particle Filtering in Signal Processing” Guest Editor: P. Djuric, S. Godsill, A. Doucet *Eurasip Journal on Applied Signal Processing, Vol 2004, No 15, 1 November 2004*

[Gewecke 1989] “Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte-Carlo integration” J. Gewecke *Econometrica* , 24:1317-1399; 1989

[Haan 2001] “Sequential Methods for DNA sequencing” N.M. Haan S. J. Godsill *proceeding of ICASSP 2001*

[Hue 2002] “Sequential Monte Carlo Methods for multiple target tracking and data fusion” C. Hue J-P Le Cadre P. Perez *IEEE transactions on signal processing*, 50(2): 309-325, February 2002.

Bibliographie applications diverses (2)

[Isard 1996] “Contour Tracking by Stochastic Propagation of Conditional Density” M. Isard A. Blake *Proceeding of the European Conference on Computer Vision, 1:343-356, Cambridge 1996*

[Musso 2000] “Extended Target tracking with regularized particle filter” G. Musso S. Chala *Proceeding of RADAR 2000, Berlin, Germany, August 2000*

[Thrun 2000] “Particle Filters in Robotics” S. Thrun *Proceedings of the 17th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, 2002*

ANNEXES

Annexe historique [Bertozzi 2003]

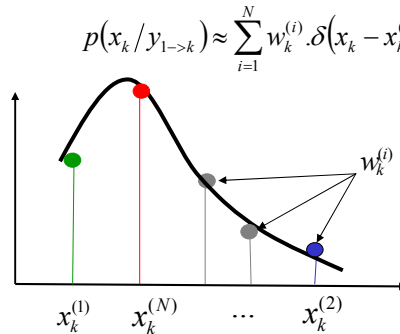
- Monte-Carlo
 - 1946: méthodes de Monte-Carlo (Ulam, Von Neumann)
 - 1951: méthode de rejet [Von Neuman 1951]
 - 1956: échantillonnage selon l'importance [Marshall 1956]
 - génération par chaîne de Markov (MCMC):
 - 1970: algorithme de Metropolis-Hasting [Hastings 1970]
 - 1984: échantillonnage de Gibbs [Geman 1984]
- Filtrage Bayesian
 - 1960: Kalman [Kalman 1960]
 - 1970: Kalman étendu (Jaswinski) [Jaswinski 1970]
 - 1971: approximation par somme de Gaussienne (Sorenson & Alspach) [Sorenson 1971]
 - 1971: grid-based methods (Bucy & Senne) [Bucy 1971]

Annexe historique [Bertozzi 2003] (2)

- Filtrage par technique de Monte-Carlo, Monte-Carlo séquentiel:
 - 1969/1970 (Handshin, Akashi, Kunamoto)
 - 1987: analyse des séries temporelles [Kitagawa 1987]
 - 1989: analyse du signal radar [Salut 1989]
 - 1993: bootstrap filter pour analyse du signal radar [Gordon 1993]
 - 2000: unification des différentes méthodes [Doucet 2000]

Principe du filtrage particulaire estimation de la densité marginale $x_k / y_{0 \rightarrow k}$

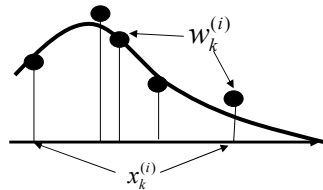
$$\left. \begin{aligned} p(x_k / y_{1 \rightarrow k}) &= \int_{x_0} \dots \int_{x_{k-1}} p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) dx_0 \dots dx_{k-1} \\ p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) &\approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(x_k / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_k - x_k^{(i)})$$



67

Principe du filtrage particulaire estimation en ligne du vecteur d'état

$$p(x_k / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_k - x_k^{(i)})$$



estimateur MMSE:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k,MMSE} &= \int x_k p(x_k / y_{1 \rightarrow k}) dx_k \\ \Rightarrow \hat{x}_{k,MMSE} &\approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_k^{(i)} \end{aligned}$$

estimateur MAP:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k,MAP} &= \arg \max_{x_k} \{p(x_k / y_{1 \rightarrow k})\} \\ \Rightarrow \hat{x}_{k,MAP} &\approx x_k^{(j)} \Big| w_k^{(j)} = \max_i \{w_k^{(i)}\} \end{aligned}$$

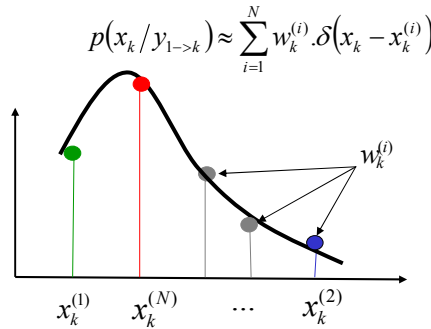
68

Principe du filtrage particulaire estimation de la densité marginal $x_{k-p} / y_{1 \rightarrow k}$

$$p(x_{k-p} / y_{1 \rightarrow k}) = \int \dots \int_{x_0} \int_{x_{k-p-1}} \int_{x_{k-p+1}} \dots \int_{x_k} p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) dx_0 \dots dx_{k-p-1} dx_{k-p+1} \dots dx_k$$

$$p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_{0 \rightarrow k} - x_{0 \rightarrow k}^{(i)})$$

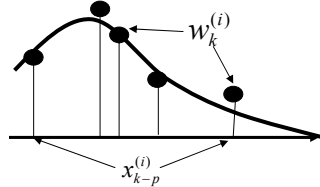
$$\Rightarrow p(x_{k-p} / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_{k-p} - x_{k-p}^{(i)})$$



69

Principe du filtrage particulaire estimation hors ligne du vecteur d'état (lissage)

$$p(x_{k-p} / y_{1 \rightarrow k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \cdot \delta(x_{k-p} - x_{k-p}^{(i)})$$



estimateur MMSE:

$$\hat{x}_{k-p, MMSE} = \int x_{k-p} p(x_{k-p} / y_{1 \rightarrow k}) dx_{k-p}$$

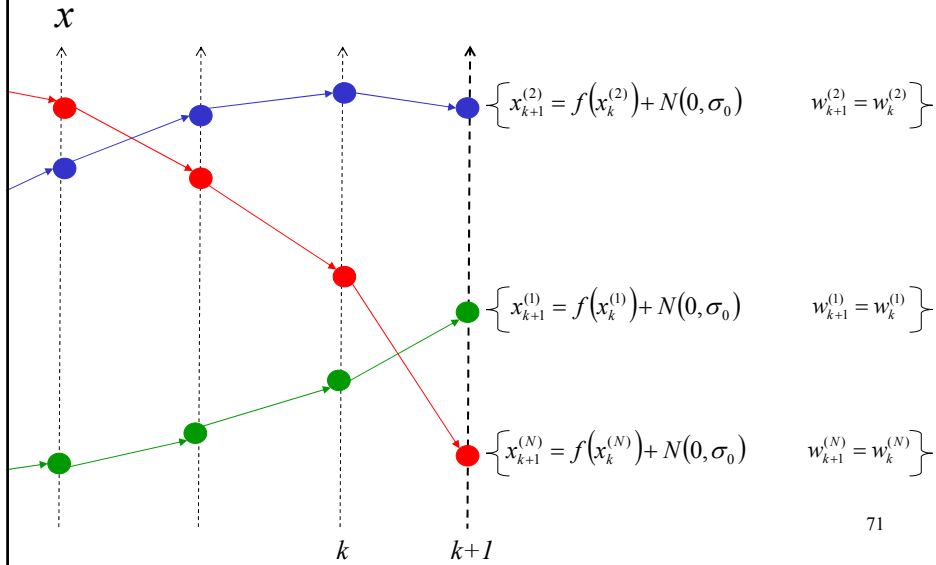
$$\Rightarrow \hat{x}_{k-p, MMSE} \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} x_{k-p}^{(i)}$$

estimateur MAP:

$$\hat{x}_{k-p, MAP} = \arg \max_{x_{k-p}} \{p(x_{k-p} / y_{1 \rightarrow k})\}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{k-p, MAP} \approx x_{k-p}^{(j)} \Big| w_{k-p}^{(j)} = \max_i \{w_k^{(i)}\}$$

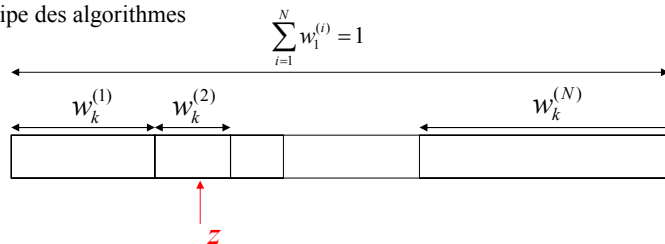
70

Principe du filtrage particulaire
prédiction

71

Principe du filtrage particulaire
redistribution (3)

- Principe des algorithmes



- N tirages uniforme sur $[0, 1]$: $z \sim U([0, 1])$

$$\text{si } \left(\sum_{i=1}^{l-1} w_k^{(i)} < z < \sum_{i=1}^l w_k^{(i)} \right): x_{0 \rightarrow k}^{(j), \text{nouveau}} = x_{0 \rightarrow k}^{(l), \text{ancien}}$$

- Loi de probabilité des trajectoires après redistribution

$$p(x_{0 \rightarrow k}^{(j), \text{nouveau}} = x_{0 \rightarrow k}^{(i), \text{ancien}}) = w_k^{(i), \text{ancien}}$$

72

Variantes et optimisations

- Sequential Importance Sampling (SIS) [Doucet 2000]: pas de redistribution
- Sequential Importance Sampling Resampling (SISR) [Doucet 2000] = filtrage particulaire
- Bootstrap filter: redistribution à tous les instants (sans conditions)
- Rao-Blackwellisation [Doucet 2000]:
 - Une partie du vecteur d'état est gaussien conditionnellement à l'autre partie
 - le particules ne contiennent qu'une partie de l'état
 - un filtre de Kalman est associé à chaque particule
- Fonction d'importance [Gordon 2002]
 - Optimale (minimise la variance des poids des particules):

$$\pi_{opt} = p(x_k / x_{k-1}^{(i)}, y_k)$$
 - Prior

$$\pi_{prior} = p(x_k / x_{k-1}^{(i)})$$
 - Vraisemblance

$$\pi_{vrais} = p(y_k / x_k)$$

73

Variantes et optimisations (2)

- Ordre des étapes
 - ex: possibilité de combiner à la fois la propagation et la redistribution [Cheug 2004])
- Variantes des algorithmes de lissage
 - Fixed lag smoothing [Doucet 2000]
 - Fixed interval smoothing [Kitagawa 1987] [Kitagawa 1991]
 - Two filters [Briers 2005]
- Algorithmes de redistributions
 - Réduction des complexités [Legland 2003]
 - Reconstruction d'une densité continuée à l'aide de Noyaux [Gordon 2002]

74

Support théorique mise à jour récursive des poids

Si à l'instant k-1:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} \sim \pi(x_{0 \rightarrow k-1} / y_{1 \rightarrow k-1}) \\ \left\{ x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k-1})}{\pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{0 \rightarrow k-1})} \right\}_{i=1 \rightarrow N} \end{array} \right\} \quad \text{approximation discrète de } p(x_{0 \rightarrow k-1} / y_{1 \rightarrow k-1})$$

Et si, à l'instant k, les nouveaux supports sont générés selon:

$$\{x_{0 \rightarrow k}^{(i)}\}_{i=1 \rightarrow N} \sim \pi(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) = \pi(x_k / x_{0 \rightarrow k-1}, y_{1 \rightarrow k}) \pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})$$

Alors, d'après le principe de l'échantillonnage selon l'importance

$$\left\{ x_{0 \rightarrow k}^{(i)}, w_k^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}{\pi(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})} \right\}_{i=1 \rightarrow N} \quad \text{approximation discrète de } p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k})$$

75

Comment calculer ces nouveaux poids ?

Support théorique mise à jour récursive des poids (2)

$$w_k^{(i)} = \frac{p(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}{\pi(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}$$

en utilisant la règle de Bayes:

$$p(A/B, C) = \frac{p(B/A, C) \cdot p(A/C)}{p(B/C)}$$

on a:

$$p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) = p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k-1}, y_k) \quad \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{C} \quad \text{B} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \end{array}$$

$$p(x_{0 \rightarrow k} / y_{1 \rightarrow k}) = p(x_{0 \rightarrow k-1} / y_{1 \rightarrow k-1}) \frac{p(x_k / x_{k-1}) p(y_k / x_k)}{p(y_k / y_{1 \rightarrow k-1})}$$

76

Support théorique mise à jour récursive des poids (3)

$$w_k^{(i)} = \frac{p(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}{\pi(x_{0 \rightarrow k}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k})}$$

$$w_k^{(i)} \propto \frac{p(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k-1})}{\pi(x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)} / y_{1 \rightarrow k-1})} \times \frac{p(x_k^{(i)} / x_{k-1}^{(i)}) \cdot p(y_k / x_k^{(i)})}{\pi(x_k^{(i)} / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k})}$$

$w_{k-1}^{(i)}$

$$w_k^{(i)} \propto w_{k-1}^{(i)} \cdot \frac{p(x_k^{(i)} / x_{k-1}^{(i)}) \cdot p(y_k / x_k^{(i)})}{\pi(x_k^{(i)} / x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, y_{1 \rightarrow k})}$$

77

Suivi aveugle de la qualité du canal radio modèle

- Canal deux trajets

$$y[k] = h_1[k]s[k] + h_2[k]s[k-1] + \sigma \cdot u[k]$$

- y_k : signal reçu
- s_k : symboles émis inconnu (alphabet connu du récepteur = BPSK)
- u_k : bruit + interférence
- $h_{1,2}[k]$: taps du canal,
 - 2 modèles de Jakes indépendants (distribution de Rayleigh, spectre Doppler)
 - Doppler = $fd \cdot T$

- Poursuite de la qualité du canal:

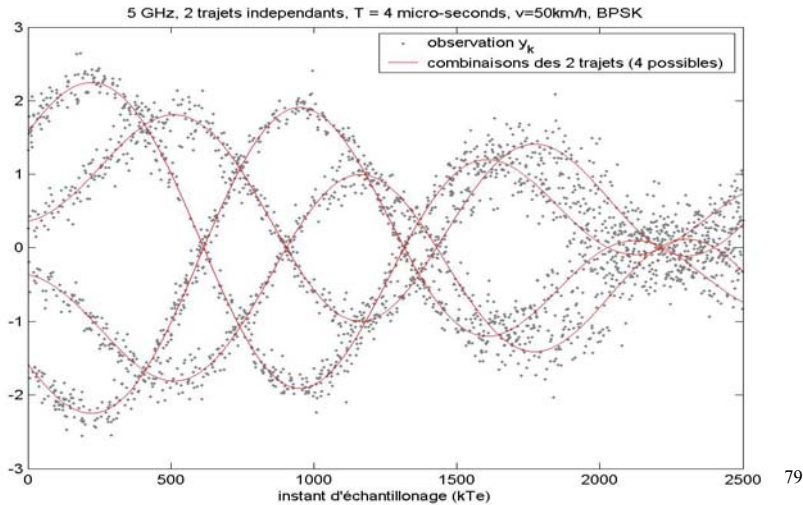
$$\|h_1[k]\|$$

$$\|h_2[k]\|$$

$$\sigma^2$$

78

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation exemple de signal observé



Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation modèle d'état

Définition du vecteur d'état:

$$x[k] = (h_1[k] \quad h_2[k] \quad \sigma[k])^t$$

Modèle d'évolution:

$$p(x[k+1]/x[k]) = (N_c(0, \beta) \quad N_c(0, \beta) \quad N(0, \lambda))^t$$

Modèle d'observation:

$$p(y[k]/x[k]) = \sum_{s_k} \sum_{s_{k-1}} p(y[k], (s_k, s_{k-1})/x[k])$$

$$p(y[k]/x[k]) = \frac{0.25}{2\pi \sigma^2[k]} \left\{ \exp\left[-\frac{\|y_k - (h_1[k] + h_2[k])\|^2}{2\sigma^2[k]}\right] + \exp\left[-\frac{\|y_k - (h_1[k] - h_2[k])\|^2}{2\sigma^2[k]}\right] \right. \\ \left. + \exp\left[-\frac{\|y_k - (-h_1[k] + h_2[k])\|^2}{2\sigma^2[k]}\right] + \exp\left[-\frac{\|y_k - (-h_1[k] - h_2[k])\|^2}{2\sigma^2[k]}\right] \right\}$$

Dynamique:
hypothèses sur la vitesse de
variation des paramètres
On choisit: $\beta=0.05 \quad \lambda=0.005$

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation initialisation de l'algorithme

A l'instant k=0:

Initialisation des supports (Gaussienne):

$$x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} h_0^{(i)}[0] \\ h_1^{(i)}[0] \\ \sigma^{(i)}[0] \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} N_c(0,1) \\ N_c(0,1) \\ N(0,1) \end{pmatrix}$$

*N: nombre de particules=50
Fonction d'importance « prior »
S: seuil de redistribution=N/10*

Initialisation des poids:

$$w^{(i)}[0] = 1 / N$$

81

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation algorithme (1)

A la réception de la mesure yk:

1. propagation des supports:

$$x^{(i)}[k] = x^{(i)}[k-1] + (\beta.N_c(0,1) \quad \beta.N_c(0,1) \quad \lambda.N(0,1))^t \quad x_{0 \rightarrow k}^{(i)} = (x_{0 \rightarrow k-1}^{(i)}, x^{(i)}[k])$$

2. mise à jour des poids:

$$w^{(i)}[k] = \frac{w^{(i)}[k-1] \cdot 0.25}{2\pi (\sigma^{(i)}[k])^2} \left(\exp \left[-\frac{\|y_k - (h_1^{(i)}[k] + h_2^{(i)}[k])\|^2}{2(\sigma^{(i)}[k])^2} \right] + \exp \left[-\frac{\|y_k - (h_1^{(i)}[k] - h_2^{(i)}[k])\|^2}{2(\sigma^{(i)}[k])^2} \right] + \exp \left[-\frac{\|y_k - (-h_1^{(i)}[k] + h_2^{(i)}[k])\|^2}{2(\sigma^{(i)}[k])^2} \right] + \exp \left[-\frac{\|y_k - (-h_1^{(i)}[k] - h_2^{(i)}[k])\|^2}{2(\sigma^{(i)}[k])^2} \right] \right)$$

Normalisation:

$$S = \sum_{i=1}^N w^{(i)}[k]. \quad \text{for } i=1 \rightarrow n: w^{(i)}[k] = w^{(i)}[k] / S$$

3. estimation de l'état:

$$\hat{x}[k] = \sum_{i=1}^N w^{(i)}[k] x^{(i)}[k]$$

82

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation algorithme (2)

4. Re distribution

$$Si: \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w^{(i)}[k])^2} < RsTh$$

Redistribue chaque particule (i) de telle sorte que:

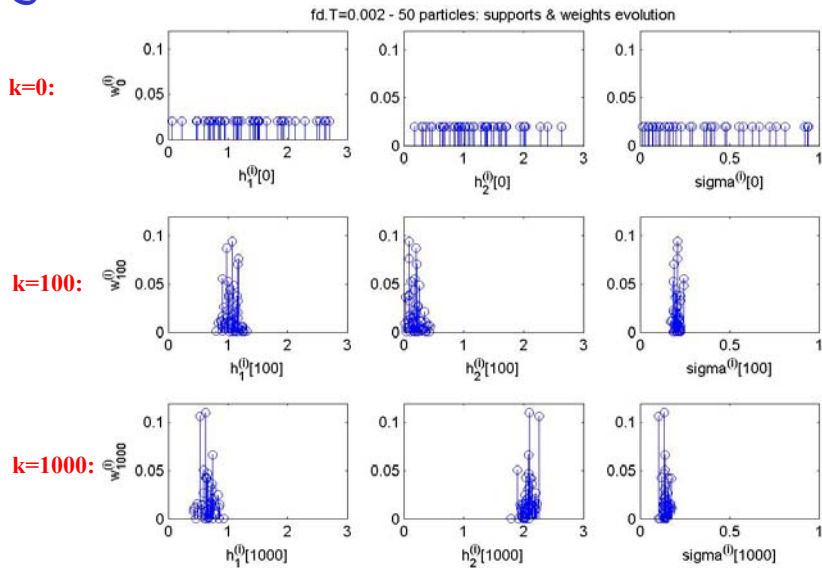
$$p(x_{0 \rightarrow k}^{(i),new} = x_{0 \rightarrow k}^{(j)}) = w^{(j)}[k]$$

Mise à jour des poids (i):

$$w_t^{(i),new} = \frac{1}{N}$$

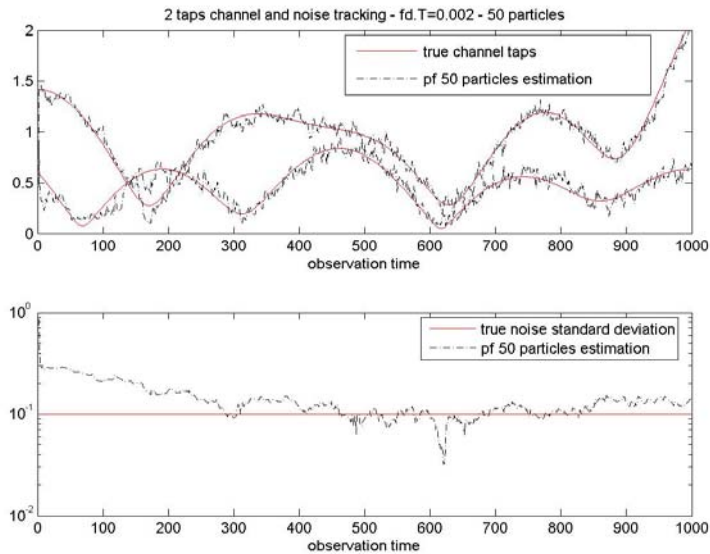
83

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation



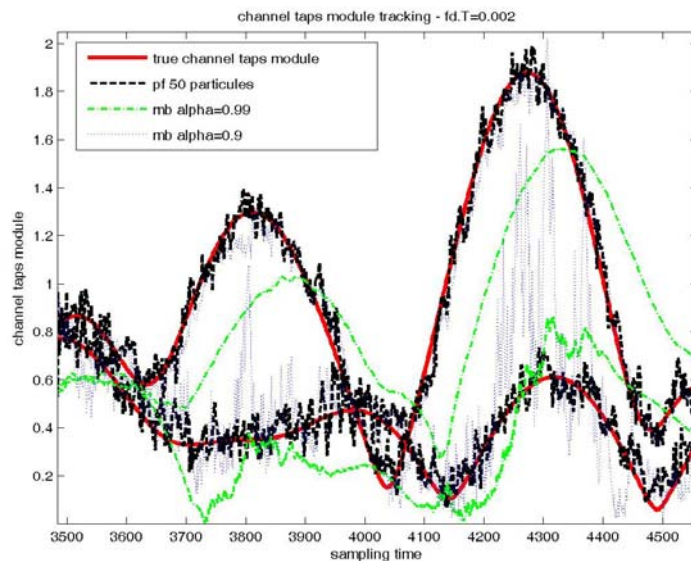
84

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation performances



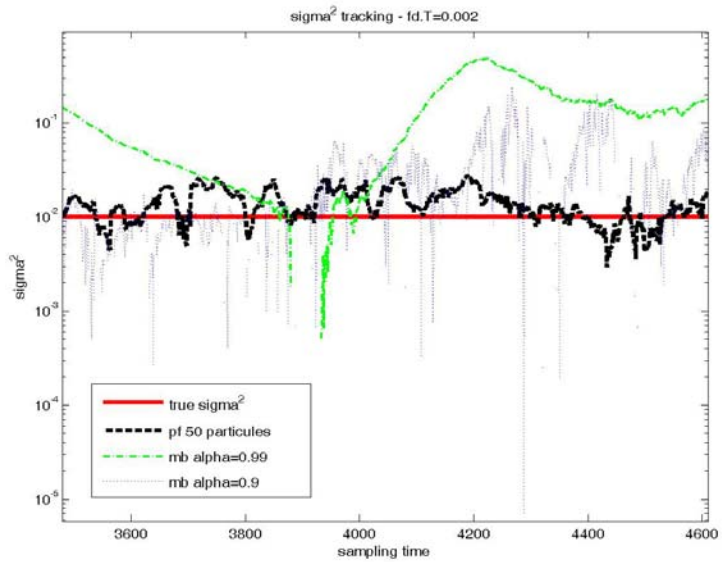
85

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation performances (2)



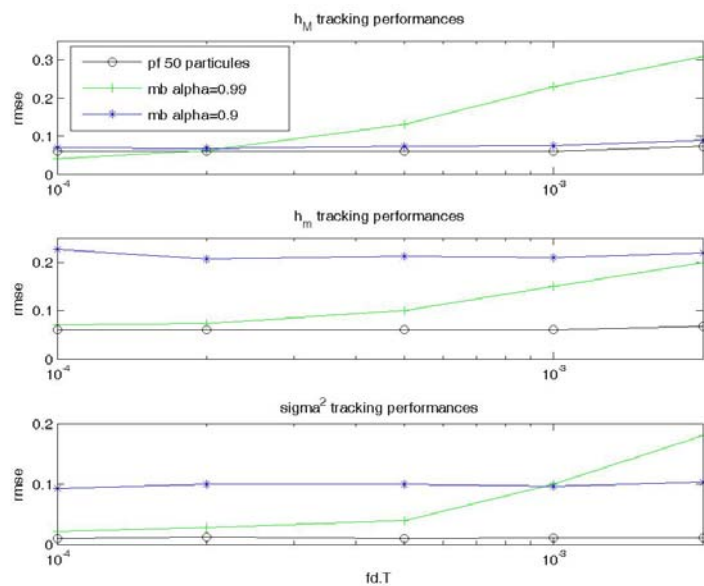
36

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation performances (3)



87

Suivi aveugle de la qualité d'un canal de propagation performances (4)



88