

3°) Vérifier que pour $x > 0$,

$$g(x) = \frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

4°) En déduire la limite de g en $+\infty$.

5°) Calculer $g'(x)$ pour $x \in [0; +\infty[$.

6°) Montrer que pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} \text{ avec } h(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$$

7°) Réaliser l'étude complète de la fonction h .

8°) En déduire les variations de g pour $x \in [0; +\infty[$.

9°) Dresser le tableau de variation complet de g pour $x \in [0; +\infty[$.

3) Ecriture de $g(x)$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

5) $g'(x) = \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{x^2(x^2+1)}$$

6) $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2+1}$

7) $h'(x) = \frac{-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

Exercice 3

Pour $x \in [0; \pi]$, $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation complet.

2°) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in [0; \pi]$

3°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in]0; \pi] \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Etudier les variations de f sur $]0; \pi]$.

4°) Soit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

Calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et $h'''(x)$.

5°) A l'aide des signes et des sens de variation de la fonction h et de ses dérivées successives, en déduire le signe de $h(x)$.

6°) Prouvez que pour $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

4) $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

$h''(x) = -\sin x + x$

$h'''(x) = -\cos x + 1$

x	0		π
$h'''(x)$		+	
$h''(x)$	0	+	
$h'(x)$	0	+	
$h(x)$	0	+	

$\forall x \in [0; \pi], h(x) \geq 0$

Ex 3

1) $g'(x) = -x \sin x$

x	0		π
$g'(x)$		-	

2) $g(x)$

$g(x)$	0		$-\pi$
--------	---	--	--------

3) $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$u(x) = x \cos x - \sin x$
 $u'(x) = g(x) < 0$

x	0		π
$f'(x)$		-	
$f(x)$	1		0

6) $h''(x) \geq 0$
 $h(x) \geq 0$

$\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$
 $-\sin x + x \geq 0$
 $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$