MVA902 - Test n°1

Samedi 21 février 2015

Tous documents autorisés (notes de cours et d'ED).
Les téléphones mobiles et autres équipements communicants doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

MERCI DE REMETTRE L'ENONCE AVEC VOTRE COPIE

Important : Remplissez l'en-tête de toutes vos pages selon le modèle suivant :

MVA902	Test n° 1
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (6 chiffres)
Votre groupe d'ED : ... (jour, heure, salle)	Nom de l'enseignant : R. Touzé

Exercice 1

$f \text{ est définie par } f(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x}$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2°) Calculer la dérivée de f sur son domaine de définition.

3°) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Si oui, on notera $\tilde{f}$ la fonction associée prolongée par continuité.

4°) La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

5°) Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction $\tilde{f}$ au point A d'abscisse 1.

Exercice 2

$$\text{Soit la fonction } g \text{ définie par } g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \ si\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1°) La fonction g est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

2°) Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction g au point A d'abscisse 0.

3°) Vérifier que pour $x > 0$,

$$g(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

4°) En déduire la limite de g en $+\infty$.

5°) Calculer $g'(x)\ pour\ x \in [0; +\infty[$.

6°) Montrer que pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}\ avec\ h(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - ln(1+x^2)$$

7°) Réaliser l'étude complète de la fonction h.

8°) En déduire les variations de $g\ pour\ x \in [0; +\infty[$.

9°) Dresser le tableau de variation complet de $g\ pour\ x \in [0; +\infty[$.

Exercice 3

$$Pour\ x \in [0; \pi], \qquad g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation complet.

2°) En déduire le signe de $g(x)\ pour\ x \in [0; \pi]$

3°) $Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ par\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}\ si\ x \in]0; \pi] \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Etudier les variations de f sur $]0; \pi]$.

4°) Soit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :

$h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$

$Calculer\ h'(x), h''(x)\ et\ h'''(x)$.

5°) A l'aide des signes et des sens de variation de la fonction h et de ses dérivées successives, en déduire le signe de $h(x)$.

6°) Prouvez que pour $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

☆☆☆☆☆☆