Exercice 1

Montrez que $\forall x\ ]-1;1[, Arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arcsin}(x)$

Études complète de la fonction f définie sur $]-1;1[$ par

$$f(x) = Arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

f est de la forme $\arctan u$ dont la dérivée est de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ avec :

$$u_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u'_{(x)} = \frac{1\sqrt{1-x^2} - x\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}^2} = \frac{\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

car u de la forme $\frac{v}{w}$ dont la dérivée est de la forme $\frac{v'w - w'u}{w^2}$ *avec :*

$$v_{(x)} = x$$

$$w_{(x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$v'_{(x)} = 1$$

$$w'_{(x)} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et w' de la forme $\sqrt{z}$ dont la dérivée est de la forme : $\frac{z'}{2\sqrt{z}}$ *avec :*

$$z_{(x)} = 1 - x^2$$

$$z'_{(x)} = -2x$$

$$Soit\ \ f'(x) = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + C$$

$$Or\ \ \arctan\left(\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}\right) = \arcsin 0 + C \quad soit\ \ C = 0$$

$$Donc\ \ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x$$

$Etude\ complète\ de\ f(x) = \arcsin x$

$\mathcal{D}f = \left\{x \in \mathbb{R}, \sqrt{1-x^2} \neq 0 \text{ et } 1-x^2 \geq 0\right\}$

$1 - x^2 \geq 0$ pour $x \in [-1;1]$, $\sqrt{1-x^2} \neq 0$ pour $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

$\mathcal{D}f =]-1;0[\cup \{0\} \cup]0;1[$

$\forall x \in \mathcal{D}f, -x \in \mathcal{D}f$

$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin(x)$

$f(-x) = \arcsin(-x) = -\arcsin(x) = -f(x)$

f est donc une fonction impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. On peut donc limiter l'étude de la fonction à l'intervalle $I = [0;1[$

$f(0) = \arcsin(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$

$\mathcal{D}f' = \mathcal{D}f =]-1;1[$

$f'(x) = (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

x	0	1
$\sqrt{1-x^2}$	$+$	0
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$+$	$\Vert$
$signe\ f'(x)$	$+$	$\Vert$
$Sens\ de\ Variation\ f(x)$	$0 \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Tableau de valeurs

x	0	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}6$	$0{,}7$	$0{,}8$	$0{,}9$	1
y	0	$\simeq 0{,}1$	$\simeq 0{,}2$	$\simeq 0{,}3$	$\simeq 0{,}41$	$\simeq 0{,}52$	$\simeq 0{,}64$	$\simeq 0{,}78$	$\simeq 0{,}93$	$\simeq 1{,}12$	$\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$

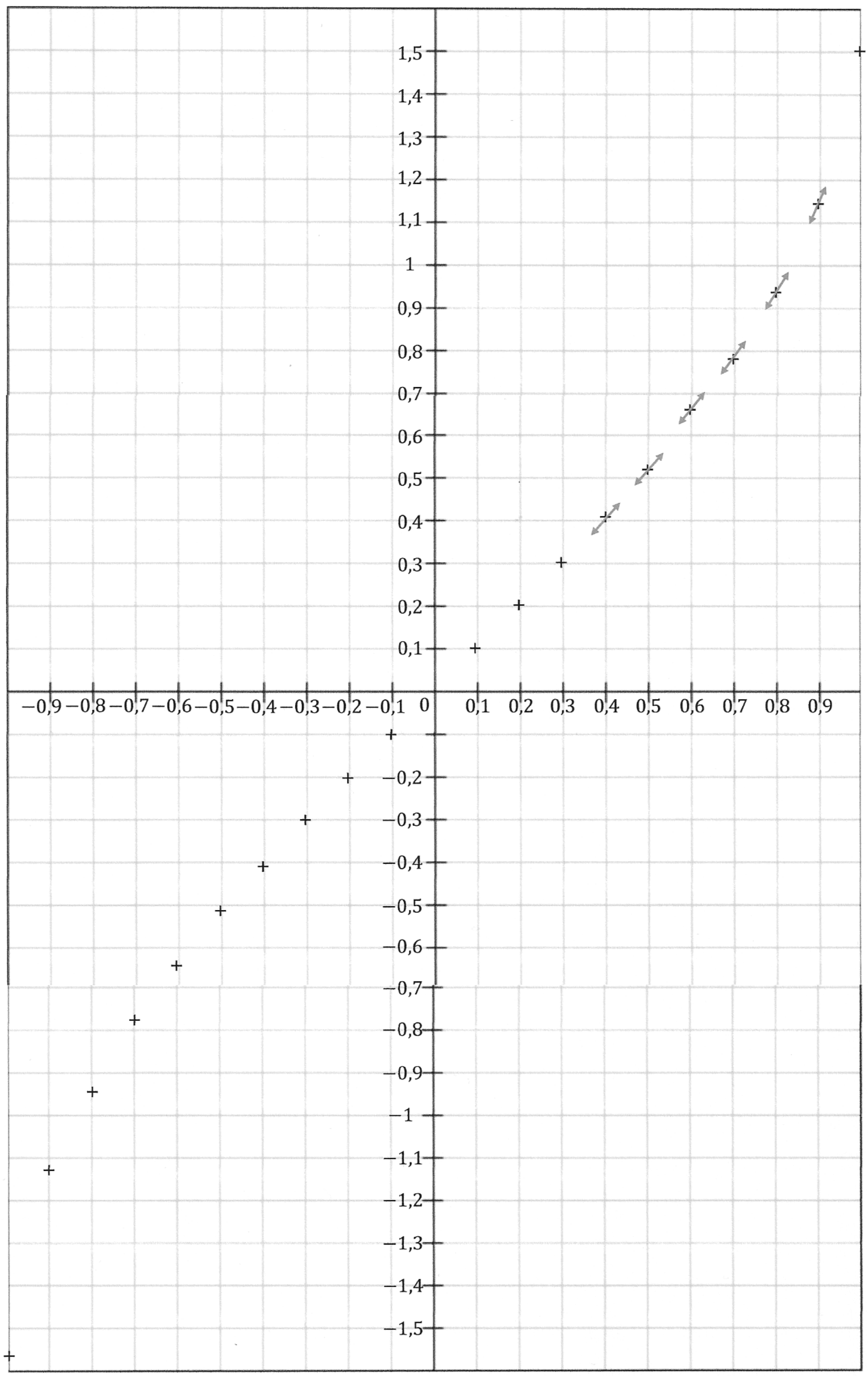
$(Ta):\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$(T0):\ y = \frac{1}{\sqrt{1-(0)^2}}(x-0) + \text{ Arctan}\left(\frac{0}{\sqrt{1-(0)}}\right)$

$(T0):\ y = x + \text{ Arctan}(0)$

$(T0):\ y = x + 0$

$(T0):\ y = x$


1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
−0,9 −0,8 −0,7 −0,6 −0,5 −0,4 −0,3 −0,2 −0,1 0
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9
−0,2
−0,3
−0,4
−0,5
−0,6
−0,7
−0,8
−0,9
−1
−1,1
−1,2
−1,3
−1,4
−1,5

Exercice 2

Encadrez les solutions de l'équation suivante par deux entiers consécutifs, puis à 10^{-1} près.

$$x^4 - 6x^3 - 2x + 10 = 0$$

Soit f *la fonction définie par* $f(x) = x^4 - 6x^3 - 2x + 10$

f est une fonction polynomiale C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{D}f' = \mathcal{D}f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4 - 6x^3 - 2x + 10) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^4 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^4}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^4}\right) = 1$$

Par produit de limites, $\lim_{x\to-\infty} \left(x^4 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^4}\right)\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^4}\right) = 1$$

Par produit de limites, $\lim_{x\to+\infty} \left(x^4 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^4}\right)\right) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2$

$f''(x) = 12x^2 - 36x$

$f^{(3)}(x) = 24x - 36$

$$f^{(3)}(x) \geq 0 \Leftrightarrow 24x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 36\left(\frac{3}{2}\right) = 27 - 54 = -27$$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 36x \geq 0 \Leftrightarrow x(12x - 36) \geq 0$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \,]-\infty; 0] \cup [3; +\infty[$

$f'(0) = -2$

$f'(3) = 4(3)^3 - 18(3)^2 - 2 = 108 - 162 - 2 = -56$

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2$

La fonction f' *est strictement croissante sur* $]-\infty; 0]$ *et à valeurs dans* $]-\infty; -2]$.

La fonction f' *est strictement décroissante sur* $]0;3]$ *et à valeurs dans* $[-56;-2[$.

La fonction f' *est strictement croissante sur* $]3;+\infty[$ *et à valeurs dans* $]-56;+\infty[$.

La fonction f' *réalise une bijection de* $]3;+\infty[$ *dans* $]-56;+\infty[$.

Or $0 \in]-56;+\infty[$. *D'après le théorème de la bijection ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel* $\alpha \in]3;+\infty[$ *tel que* $f'(x) = 0$.

En appliquant la méthode de dichotomie ou bien la méthode de balayage à l'aide de la calcultrice graphique, on obient un encadrement de la valeur de α.

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2$

$f'(4) = -34$ *et* $f'(5) = 2\times 25(1) - 2 = 48$ *d'où* $\alpha \in]4;5[$

De même $f'(4{,}52) < 0$ *et* $f'(4{,}53) > 0$ *d'où* $\alpha \in]4{,}52;4{,}53[$

$\forall x \in]-\infty;\alpha[$ $f'(x) < 0$ *d'où* f *strictement décroissante sur* $]-\infty;\alpha[$.

$\forall x \in [\alpha;+\infty[$ $f'(x) \geq 0$ *d'où* f *strictement croissante sur* $[\alpha;+\infty[$.

$f(x) = x^4 - 6x^3 - 2x + 10$

$f(4) = -126$ *et* $f(5) = -125$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		4		$\alpha?$		5		$+\infty$
$f^{(3)}(x)$			$-$		|					$+$					
sens de variation de f''	∞				-27										$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0					$+$			
Sens de Variation f'	$-\infty$		-2				-56		-34				48		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Sens de Variation f	$+\infty$										$f(\alpha) < 0$				$+\infty$

La fonction f *est strictement décroissante sur* $]-\infty;\alpha[$ *et à valeurs dans* $]f(\alpha);+\infty[$.

La fonction f *est strictement croissante sur* $[\alpha;+\infty[$ *et à valeurs dans* $[f(\alpha);+\infty[$.

La fonction f *réalise une bijection de* $]-\infty;\alpha[$ *dans* $]f(\alpha);+\infty[$.

Or $0 \in]f(\alpha);+\infty[$. *D'après le théorème de la bijection ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel* $\beta \in]-\infty;\alpha[$ *tel que* $f(\beta) = 0$.

De même, la fonction f *réalise une bijection de* $[\alpha ; +\infty[$ *dans* $[f(\alpha) ; +\infty[$.

Or $0 \in]f(\alpha) ; +\infty[$. *D'après le théorème de la bijection ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel* $\delta \in]-\infty ; \alpha[$ *tel que* $f(\delta) = 0$.

En appliquant la méthode de dichotomie ou bien la méthode de balayage à l'aide de la calcultrice graphique, on obient un encadrement de la valeur de β *et* δ.

$f(1) = 3$ *et* $f(2) = -26$ *d'où* $\beta \in]1 ; 2[$

$f(1{,}1) \approx 1{,}28$ *et* $f(1{,}2) \approx -0{,}69$ *d'où* $\beta \in]1{,}1 ; 1{,}2[$.

$f(6) = -2$ *et* $f(7) = 339$ *d'où* $\delta \in]6 ; 7[$

$f(6{,}0) = -2$ *et* $f(6{,}1) \approx 20{,}5$ *d'où* $\delta \in]6{,}0 ; 6{,}1[$.