

MVA902 - DM n°3

À rendre à Monsieur Touzé : Samedi 12 mars 2016

Important : Remplissez l'en-tête de toutes vos pages selon le modèle suivant :

MVA902	DM n° 3
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (6 chiffres)
Votre groupe d'ED : ... (jour, heure, salle)	Nom de l'enseignant : R. Touzé

Exercice 1

f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cdot 2^x$

Etude complète de la fonction f .

Exercice 2

Pour $x \in [0; \pi]$, $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation complet.

2°) En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in [0; \pi]$

3°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in]0; \pi] \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Etudier les variations de f sur $]0; \pi]$.

4°) Soit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

Calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et $h^{(3)}(x)$.

5°) A l'aide des signes et des sens de variation de la fonction h et de ses dérivées successives, en déduire le signe de $h(x)$.

6°) Prouvez que pour $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

7°) En vous appuyant sur l'étude précédente et de manière analogue, montrez que, pour $x \geq 0$,

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$