MVA902 - DM n°3

À rendre à Monsieur Touzé : Samedi 07 mars 2015

Important : Remplissez l'en-tête de toutes vos pages selon le modèle suivant :

MVA902	DM n° 3
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (6 chiffres)
Votre groupe d'ED : ... (jour, heure, salle)	Nom de l'enseignant : R. Touzé

Exercice 1

$$f \text{ est définie par } f(x) = \frac{ln(x+1)}{x}$$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2°) Calculer la dérivée de f sur son domaine de définition.

3°) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Si oui, on notera $\tilde{f}$ la fonction associée prolongée par continuité.

4°) La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

5°) Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction $\tilde{f}$ au point A d'abscisse 1.

Exercice 2

$$\text{Soit la fonction } g \text{ définie par } g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & si\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1°) La fonction g est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

2°) Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction g au point A d'abscisse 0.

3°) Vérifier que pour $x > 0$,

$$g(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

4°) En déduire la limite de g en $+\infty$.

5°) Calculer $g'(x)$ *pour* $x \in [0;+\infty[$.

6°) Montrer que pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x^2} \text{ avec } h(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - ln(1+x^2)$$

7°) Réaliser l'étude complète de la fonction h.

8°) En déduire les variations de g *pour* $x \in [0;+\infty[$.

9°) Dresser le tableau de variation complet de g *pour* $x \in [0;+\infty[$.

Exercice 3

$$Pour\ x \in [0;\pi], \qquad g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$$

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation complet.

2°) En déduire le signe de $g(x)$ *pour* $x \in [0;\pi]$

3°) *Soit* f *la fonction définie par* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & si\ x \in]0;\pi] \\ f(0) = 1 & \end{cases}$

Etudier les variations de f sur $]0;\pi]$.

4°) Soit la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par :

$h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$

Calculer $h'(x), h''(x)$ *et* $h'''(x)$.

5°) A l'aide des signes et des sens de variation de la fonction h et de ses dérivées successives, en déduire le signe de $h(x)$.

6°) Prouvez que pour $x \geq 0$,

$$0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

******