MVA902 - Corrigé DM n°1

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition de la fonction g

$$g(x) = \sqrt{\frac{16-4x^2}{(x+1)(-3x+9)}}$$

$g(x) = \sqrt{\frac{16-4x^2}{(x+1)(-3x+9)}} = \sqrt{\frac{(4-2x)(4+2x)}{(x+1)(-3x+9)}}$

$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \frac{16-4x^2}{(x+1)(-3x+9)} \geq 0 \,;\, (x+1)(-3x+9) \neq 0\right\}$

x	$-\infty$		-2		-1		2		3		$+\infty$
$4-2x$		+	⋮	+	⋮	+	0	-	⋮	-	
$4+2x$		-	0	+	⋮	+	⋮	+	⋮	+	
$x+1$		-	⋮	-	0	+	⋮	+	⋮	+	
$-3x+9$		+	⋮	+	⋮	+	⋮	+	0	-	
$g(x)$		+	0	-	‖	+	0	-	‖	+	

Donc $D_g =]-\infty\,;\,-2] \cup]-1\,;\,2] \cup]3\,;\,+\infty[$

Exercice 2

f *est définie par* $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \frac{x+1}{1-x} > 0 \,;\, 1-x \neq 0\right\}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		-	0	+	⋮	+	
$1-x$		+	⋮	+	0	-	
$\frac{x+1}{1-x}$		-	0	+	‖	+	

Donc $D_f =]-1\,;\,1[$

2°) Etudier la parité de la fonction f

$D_f =]-1\,;\ 1[=]-1\,;\ 0[\cup \{0\} \cup]0\,;\ 1[$
D'après son écriture, D_f est symétrique par rapport à 0.

$\forall x \in D_f, -x \in D_f$

$$f(-x) = ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{1-x}}\right) = -ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$$

La fonction f est impaire. Sa courbe représentative C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère. L'étude de f peut être restreinte à $I = [0; 1[$.

3°) Etudier les variations de f sur $[0\,;1[$

f est définie, continue et dérivable sur I comme composée d'unefonction rationnelle et de la fonction de référence logarithme népérien.

$\forall x \in [0; 1[, \dfrac{x+1}{1-x} \in [1; +\infty[\subset]0; +\infty[$ *correspondant au domaine de définition de la fonction logarithme népérien. Soit f'la dérivée de f sur I.*

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{\frac{1(1-x)-(-1)(x+1)}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}} = \frac{2}{(x+1)(1-x)}$$

$\forall x \in [0; 1[, f'(x) > 0$ *donc f est strictement croissante sur* $[0; 1[$.

Exercice 3

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x) - 3\sin(x)$
1°) *Comparer $f(x+2\pi), f(-x), f(\pi - x)$ à $f(x)$.*
En déduire qu'il suffit d'étudier f *sur* $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$

$D_f = \mathbb{R}$, la fonction f étant la composée et la somme de fonctions usuelles définies sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi -$ périodiques, respectivement paire et impaire. De plus, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 2\pi \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \quad et \quad \pi - x \in \mathbb{R}$
$f(x+2\pi) = \sin\big(3(x+2\pi)\big) - 3\sin(x+2\pi)$
$f(x+2\pi) = \sin(3x+6\pi)) - 3\sin(x+2\pi) = \sin(3x) - 3\sin(x)$
$f(x+2\pi) = f(x)$ *donc la fonction f est $2\pi -$ périodique.*
L'étude de f peut être restreinte à l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$.
$f(-x) = \sin(-3x) - 3\sin(-x) = -\sin(3x) + 3\sin(x) = -f(x)$
La fonction f est impaire. L'étude de f peut être restreinte à $J = [0; \pi]$.
$f(\pi - x) = \sin\big(3(\pi - x)\big) - 3\sin(\pi - x)$
$f(\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - 3x) - 3\sin(x) = \sin(3x) - 3\sin(x) = f(x)$
$x = \dfrac{\pi}{2}$ *est axe de symétrie. L'étude de f peut être restreinte à* $K = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2°) *Démontrer que pour tout x réel,* $f'(x) = -6\sin(x)\sin(2x)$

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$, *la fonction f étant la composée et la somme de fonctions usuelles définies, continues et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Soit f' la dérivée de f sur K.*

$f'(x) = 3\cos(3x) - 3\cos(x) = 3(\cos(3x) - \cos(x))$

$Or \ \ \cos(p) - \cos(q) = -2sin\left(\frac{p-q}{2}\right) sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$Soit\ f'(x) = 3.(-2).sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) sin\left(\frac{3x+x}{2}\right) = -6\ sin(x)\ sin(2x)$

3°) *Etudier les variations de f sur* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

$\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = -6.sin(x)sin(2x)$

$-6 < 0, \qquad \forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \qquad sin(x) \geq 0\ , \qquad 2x \in [0\,;\pi]\ \ d'où\ \ sin(2x) \geq 0$

$Donc\ \ \forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) \leq 0$, *f est décroissante sur l'intervalle* $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

******