

MVA902 - Correction DM n°4

Exercice 1

f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cdot 4^x$

Etude complète de la fonction f .

$D_f = \mathbb{R}$, f est C^∞ comme composée et produit de fonctions C^∞ sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot 4^x = x \cdot e^{x \cdot \ln(4)} = x \cdot e^{2x \ln(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{2x \ln(2)} = 0$$

par composée de limites et par croissance comparée.

$$\text{En effet, } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \ln(2) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x \ln(2)} = 0$$

Ainsi la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{2x \ln(2)} = +\infty$$

par composée de limites et par produit de limites.

$$\text{En effet, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln(2)} = +\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{2x \ln(2)} + 2x \ln(2) e^{2x \ln(2)} = (2x \ln(2) + 1) e^{2x \ln(2)}$$

Etude du signe de $f'(x)$:

$$(2x \ln(2) + 1) e^{2x \ln(2)} \geq 0 \Leftrightarrow 2x \ln(2) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{2 \ln(2)}$$

Donc la fonction est croissante sur $\left[\frac{-1}{2 \ln(2)}; +\infty \right[$ et décroissante sur $\left] -\infty; \frac{-1}{2 \ln(2)} \right]$.

$$f\left(\frac{-1}{2 \ln(2)}\right) = \frac{-1}{2 \ln(2)} \cdot 4^{\frac{-1}{2 \ln(2)}} = \frac{-1}{2 \ln(2)} \cdot e^{2 \cdot \frac{-1}{2 \ln(2)} \ln(2)} = \frac{-1}{2 \ln(2)} \cdot e^{-1}$$

$$f\left(\frac{-1}{2 \ln(2)}\right) = \frac{-1}{2 e \ln(2)}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2 \ln(2)}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$\frac{-1}{2 e \ln(2)}$	$+\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 4 \ln(2) \cdot (x \ln(2) + 1) e^{2x \ln(2)}$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{\ln(2)}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	Concave	:	Convexe

$$f\left(\frac{-1}{\ln(2)}\right) = \frac{-1}{\ln(2)} \cdot 4^{\frac{-1}{\ln(2)}} = \frac{-1}{\ln(2)} \cdot e^{2 \frac{-1}{\ln(2)} \ln(2)} = \frac{-1}{\ln(2)} \cdot e^{-2}$$

$$f\left(\frac{-1}{\ln(2)}\right) = \frac{-1}{e^2 \ln(2)}$$

La courbe C_f présente un point d'inflexion au point $I\left(\frac{-1}{\ln(2)}; \frac{-1}{e^2 \ln(2)}\right)$.

Tangente au point d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$):

$$(T_a): y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

$$(T_a): y = (2a \ln(2) + 1) \cdot 4^a \cdot (x - a) + a \cdot 4^a$$

$$(T_a): y = (2a \ln(2) + 1) \cdot 4^a \cdot x - (2a \ln(2) + 1) \cdot 4^a \cdot a + a \cdot 4^a$$

$$(T_a): y = (2a \ln(2) + 1) \cdot 4^a \cdot x - (2a \ln(2) - a + 1) \cdot 4^a \cdot a$$

$$(T_0): y = x$$

$$(T_1): y = 4(2 \ln(2) + 1)x - 8 \ln(2)$$

a) Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin } x$.

b) Simplifier $\text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Les deux fonctions sont bien définies sur $] - 1, 1 [$. Montrons qu'elles ont la même dérivée :

$$\left[\text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]' = \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]' \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \times (1-x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On voit que sur l'intervalle $] - 1, 1 [$: $\left[\text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right]' = (\text{Arcsin } x)'$. Or deux fonctions qui ont la même dérivée sur un intervalle ont une différence constante sur cet intervalle. Comme ici les deux fonctions ont la même valeur en 0, elles sont égales sur tout l'intervalle.

$$\forall x \in] - 1, 1 [, \text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin } x.$$

Autre méthode : posons $y = \text{Arcsin } x$; y est l'unique nombre de l'intervalle $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ vérifiant $\sin y = x$. Mais alors $\cos y > 0$, d'où $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ et :

$$\text{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arctan} \frac{\sin y}{\cos y} = \text{Arctan}(\tan y) = y = \text{Arcsin } x$$

(attention au fait que l'égalité $\text{Arctan}(\tan y) = y$ n'est vraie que parce que $y \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$).

b) $f(x) = \text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est définie pour x tel que $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in] - 1, 1 [$, c'est-à-dire pour tout x réel. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]' \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \times \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On voit que $f(x)$ et $\text{Arctan } x$ ont la même dérivée sur \mathbb{R} . Leur différence est donc constante, et elle est nulle car : $f(0) = \text{Arctan } 0 = 0$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arctan } x.$$

Autre méthode : on pose $x = \tan t$, où $t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. Alors $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}$ (car $\cos t > 0$) et $\text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arcsin} \frac{\tan t}{\frac{1}{\cos t}} = \text{Arcsin}(\sin t) = t = \text{Arctan } x$ (les deux dernières égalités sont valables car $t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$).

Encadrer les solutions des deux équations suivantes par des entiers consécutifs :

a) $x^4 - 6x^3 - 2x + 10 = 0$

b) $3x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 10x - 7 = 0$.

a) Etudions les variations de la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par :

$$f(x) = x^4 - 6x^3 - 2x + 10.$$

On a : $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2$ et $f''(x) = 12x^2 - 36x = 12x(x - 3)$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	x_1	3	x_0	x_2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0	+		
$f'(x)$	$-\infty$	-2		-56	0		$+\infty$
$f'(x)$			-		0	+	
$f(x)$	$+\infty$	10	0	-77	$m < 0$	0	$+\infty$

f' continue, strictement croissante sur $[3, +\infty[$, est une bijection de $[3, +\infty[$ sur $[-56, +\infty[$, d'où l'existence et l'unicité de $x_0 > 3$ tel que $f'(x_0) = 0$.

En utilisant le même théorème, on voit que f s'annule une fois sur $[0, 3]$ et une fois sur $[x_0, +\infty[$; on a : $f(1) = 3 > 0$, $f(2) = -26 < 0$, d'où $1 < x_1 < 2$

$$f(6) = -2 < 0, f(7) = 339 > 0, \text{ d'où } 6 < x_2 < 7,$$

et : x_1 et x_2 sont les **seules solutions** de l'équation proposée.

b) on pose $f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 10x - 7$.

On a :

$$f'(x) = 15x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 10$$

$$f''(x) = 60x^3 + 60x^2 + 120x + 120 = 60(x^2 + 2)(x + 1)$$

x	$-\infty$	-2	α	-1	β	0	$+\infty$
$f'(x)$		-		0		+	
$f(x)$	$+\infty$	90	0	-55	0	10	$+\infty$

f' s'annule deux fois : en $\alpha \in]-2, -1[$ et $\beta \in]-1, 0[$, d'où le signe de $f'(x)$ et le sens de variations de f :

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	β	x_3	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$M > 0$	0	$m < 0$	0	$+\infty$

On a : $f(-2) = 37$ donc $M = f(\alpha) > 0$, $f(0) = -7$ donc $m = f(\beta) < 0$, $f(-1) = 25$.

D'après le même théorème qu'au a), f s'annule 3 fois exactement : une fois sur $]-\infty, -2[$, une fois sur $]-1, \beta[$, une fois sur $]0, +\infty[$. Appelons x_1, x_2, x_3 ces trois points ; on a :

$$f(-2) = 37 > 0, f(-3) = -361 < 0 \text{ d'où } -3 < x_1 < -2$$

$$x_2 \in]-1, \beta[\text{ d'où } -1 < x_2 < 0$$

$$f(0) = -7, f(1) = 91 \text{ d'où } 0 < x_3 < 1.$$