MVA902 - Corrigé DM n°2

Exercice 1

f *est définie par* $f(x) = \dfrac{lnx}{x^2}$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus x > 0, x \neq 0\} =]0; +\infty[$

2°) Etudier les variations de f

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles définies, continues et dérivables sur $]0; +\infty[$. Soit f' la dérivée de f sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2xln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$$1 - 2\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$$

Sur l'intervalle $]0; \sqrt{e}[$, la fonction f est strictement croissante.

Sur l'intervalle $[\sqrt{e}; +\infty[$, la fonction f est strictement déroissante.

3°) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Par produit de limites, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ *($x = 0$: asymptote verticale)*

$$f(\sqrt{e}) = \frac{ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2} = \frac{lne^{\frac{1}{2}}}{e} = \frac{lne}{2e} = \frac{1}{2e}$$

Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ *($y = 0$: asymptote horizontale)*

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	-	
Sens de variation de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

4°) Donner une équation de la tangente T à courbe representative de la fonction f au point A d'abscisse 1

$$f(1) = 0 \ \ et \ \ f'(1) = 1 \ \ d'où \ \ (T_1):\ y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1$$

Exercice 2

$f \text{ est définie par } f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 > 0 \ \ d'où\ D_f = \mathbb{R}$

2°) Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de la fonction f

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$$
$y = x - 1$: *asymptote oblique au voisinage de* $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 4$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = 3 \quad soit \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - (x + 3) = 0$$
$y = x + 3$: *asymptote oblique au voisinage de* $-\infty$

3°) Etudier les variations de f

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions usuelles définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit f' la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$ *donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.*

4°) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ \ et \ \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$f(0) = 1 \ (remarque : le\ point\ I(0; 1) est\ un\ point\ d'inflexion)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Sens de variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

Soient f et g définies sur $[1;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \quad et \quad g(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1°) Etudier les variations de f et g

$\forall x \in [1;+\infty[, \dfrac{x+1}{x} > 0,$ *f et g sont définies, continues et dérivables sur* $[1;+\infty[$ *comme quotient, composée et somme de fonctions usuelles définies, continues et dérivables sur* $[1;+\infty[$. *Soit* f' *et* g' *leurs dérivées respectives sur* $[1;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1.x - 1.(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

$\forall x \in [1;+\infty[, f'(x) > 0$ *donc f strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{\frac{1.x - 1.(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\forall x \in [1;+\infty[, g'(x) < 0$ *donc g strictement décroissante sur* $[1;+\infty[$.

2°) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

$f(1) = \ln(2) - 1 < 0$ *et* $g(1) = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ *(limite d'une fonction rationnelle en* $+\infty$*)*

$\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = 0$ *d'où par composée de limites :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$. *Par somme de limites :*

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Sens de variation de f	$\ln(2)-1$ $\nearrow$ 0

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$
Sens de variation de g	$\ln(2)-\frac{1}{2}$ $\searrow$ 0

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad f(x) \leq 0, \qquad g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \leq 0, \qquad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \quad et \quad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq \frac{1}{x+1}$$

$$Or \ \ \forall x \in [1;+\infty[, x+1 > 0 \ \ et \ \ x > 0 \ \ d'où \ \ ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$Ainsi \ \ \forall x \in [1;+\infty[, \qquad \frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

******