Exercice 1

$f \ est \ définie \ par \dfrac{\ln x}{x}$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \ et \ x \neq 0\}$

$\mathcal{D}f =]0; +\infty[$

2°) Étudier les variations de f

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ dont la dérivée f' est donc de la forme $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $avec \ \forall x \in]0; +\infty[$:

$u(x) = \ln x$
$v(x) = x$
$u'(x) = \dfrac{1}{x}$
$v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} \times x\right) - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$Résolvons \ \ 1 - \ln x \geq 0$
$\Leftrightarrow \ln x \leq 1$
$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^1$
$\Leftrightarrow x \leq e$

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln x$	‖	$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

La fonction f est strictement croissante sur $]0 \, ; e[$ et strictement décroissante sur $[e \, ; +\infty[$.

3°) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \ (par \ produit \ de \ limites) \ car \ \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \ \ et \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

La courbe présente une asymptote verticale d'équation x=0.

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{par croissance comparée.}$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de $f(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

4°) Donner une équation de la tangente T à courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 1

$(T1) : y = f'(1)(x-1) - f(1)$

$$\Leftrightarrow (T1) : y = \left(\frac{1-\ln(1)}{1^2}\right)(x-1) - \frac{\ln(1)}{1} = \left(\frac{1-0}{1}\right)(x-1) - \frac{0}{1}$$

$$\Leftrightarrow (T1) : y = 1(x-1) - 0 \Leftrightarrow (T1) : y = x - 1$$

Exercice 2

$f\ est\ définie\ par\ f(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$

1°) Déterminer le domaine de définition de la fonction f

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R}, (e^x - 1) \neq 0\}$

$Résolvons\ e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

2°) Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de la fonction f

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = -1$ $(par\ composée\ de\ limites).$

Par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) - (x)\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = 0\ car\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = -1$

La courbe $\mathcal{C}f$ admet donc une **asymptote oblique** d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} x + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0^-$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = -\infty$ $(par\ composée\ de\ limites).$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty \ (par\ composée\ de\ limites).$$

Par somme de limites $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$

La droite Cf admet donc une asymptote verticale d'équation x=0.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = 0 \ (par\ composée\ de\ limites).$$

par somme de limite $\lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}\right) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} - x - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1}\right) = 0$$

La courbe Cf admet donc une **asymptote oblique** d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$.

3°) Étudier les variations de f

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

f est de la forme $u + v$ dont la dérivée est de la forme $u' + v', \forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$u(x) = x + 1$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

$v'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ $car\ v$ de la forme $\frac{1}{z}$ dont la dérivée est de la forme $-\frac{z'}{z^2}, avec$:

$z(x) = e^x - 1$ et $z'(x) = e^x$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(e^x-1)^2 - e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(e^x)^2 - 3e^x + 1}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x} - 3e^x + 1}{(e^x-1)^2}$$

$$Résolvons\ \ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 3e^x + 1}{(e^x-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(e^x-1)^2}\left((e^x)^2 - 3e^x + 1\right) \geq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, posons :$

$$\begin{cases} X = e^x \ \ avec\ \ X \geq 0 \\ X^2 - 3X + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4\times1\times1 = 9 - 4 = 5$$

$$X_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$X_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2\times1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$X = e^x \in \left[0\,; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,; +\infty\right[$$

$$x \in \left]-\infty; ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \cup \left[ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right); +\infty\right[$$

x	$-\infty$		$ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$		0		$ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$		$-\infty$
$\frac{1}{(e^x-1)^2}$		$+$		$+$	$\|$	$+$		$+$	
$e^{2x} - 3e^x + 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left]ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right); 0\right[$, strictement décroissante sur $\left]0; ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ et strictement croissante sur $\left[ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right); +\infty\right[$.

4°) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f

$$f\left(\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + \ 1\ + \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} - 1}\right)$$

$$f\left(\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\ln(3-\sqrt{5}) - \ln(2) + \ 1\ + \frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1}\right)$$

$$f\left(\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\ln(3-\sqrt{5}) - \ln(2) \ -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) \cong -1{,}58$$

$$f\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \ 1 \ + \frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} - 1}\right)$$

$$f\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\ln(3+\sqrt{5}) - \ln(2) + \ 1 \ + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1}\right)$$

$$f\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \left(\ln(3+\sqrt{5}) - \ln(2) + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) \cong 2{,}58$$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$		0		$\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	$-\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
Variation de f	$-\infty \nearrow$	$\sim -1{,}58$	$\searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow$	$\sim 2{,}58$	$\nearrow +\infty$

Exercice 3

Soient f et g définies sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \quad et \quad g(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

1°) Etudier les variations de f et g

$\forall x \in [1;+\infty[, \frac{x+1}{x} > 0,$ *f et g sont définies, continues et dérivables sur $[1;+\infty[$ comme quotient, composée et somme de fonctions usuelles définies, continues et dérivables sur $[1;+\infty[$. Soit f' et g' leurs dérivées respectives sur $[1;+\infty[$.*

$$f'(x) = \frac{\frac{1.x - 1.(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x+(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

$\forall x \in [1;+\infty[\,, f'(x) > 0$ *donc f strictement croissante sur* $[1;+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{\frac{1.x - 1.(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

$\forall x \in [1;+\infty[\,, g'(x) < 0$ *donc g strictement décroissante sur* $[1;+\infty[$.

2°) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

$f(1) = \ln(2) - 1 < 0$ *et* $g(1) = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ (*limite d'une fonction rationnelle en* $+\infty$)

$\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$ *d'où par composée de limites :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. *Par somme de limites :*

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variation de f	$\ln(2) - 1$	$\nearrow$	0

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
Variation de g	$\ln(2) - \frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad f(x) \leq 0, \qquad g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x} \leq 0, \qquad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \geq 0$$

$$\forall x \in [1;+\infty[, \qquad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \quad et \quad ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq \frac{1}{x+1}$$

$$Or \ \ \forall x \in [1;+\infty[, x+1 > 0 \ \ et \ \ x > 0 \ \ d'où \ \ ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$Ainsi \ \ \forall x \in [1;+\infty[, \qquad \frac{1}{x+1} \leq ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

******