

Exercice

1 - Déterminer le domaine de définition de la fonction g

$$g(x) = \sqrt{\frac{16 - x^4}{(x+2)(-x+2)}} = \sqrt{\frac{(x^2 + 2^2)(x+2)(-x+2)}{(x+2)(-x+2)}} = \sqrt{\frac{(x^2 + 4)(x+2)(-x+2)}{(x+2)(-x+2)}}$$

| x | $-\infty$ | -2 | 2 | $+\infty$ |
|-------------|-----------|------|-----|-----------|
| $(x^2 + 4)$ | + | | + | + |
| $(x + 2)$ | - | 0 | + | + |
| $(-x + 2)$ | + | | 0 | - |
| $(x + 2)$ | - | 0 | + | + |
| $(-x + 2)$ | + | | 0 | - |
| $g(x)$ | + | | + | + |

$$\mathcal{D}g = \left\{ x \in \mathbb{R}, \frac{16 - x^4}{(x+2)(-x+2)} \geq 0, (x+2)(-x+2) \neq 0 \right\}$$

$$\mathcal{D}g = \mathbb{R} - \{-2; 2\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$$

2 - Etudier la parité de g

$$\mathcal{D}g =]-\infty; -2[\cup]-2; 0[\cup \{0\} \cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

$\mathcal{D}g$ est symétrique par rapport à 0. $\forall x \in \mathcal{D}g, -x \in \mathcal{D}g$

$$g(-x) = \sqrt{\frac{16 - (-x)^4}{(-x+2)(x+2)}} = \sqrt{\frac{16 - x^4}{(x+2)(-x+2)}} = g(x)$$

$g(x) = g(-x)$, la fonction g est donc *paire*. \mathcal{C}_g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3 - Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction g et déterminer les asymptotes éventuelles

g étant une fonction paire, \mathcal{C}_g est symétrique selon l'axe des ordonnées, on peut limiter l'étude de la fonction à l'intervalle $I = [0; 2[\cup]2; +\infty[$.

$$g(0) = \sqrt{\frac{16 - 0}{(0+2)(0+2)}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{16 - x^4}{(x+2)(-x+2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{(x^2 + 2^2)(x+2)(-x+2)}{(x+2)(-x+2)}}$$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{(x^2 + 4)} = \sqrt{(2^2 + 4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{16 - x^4}{(x + 2)(-x + 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{(x^2 + 2^2)(x + 2)(-x + 2)}{(x + 2)(-x + 2)}}$$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{(x^2 + 4)} = \sqrt{(2^2 + 4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 2\sqrt{2}$ ainsi la fonction g est prolongeable par continuité en 2 (et en -2 par symétrie).

En effet, par symétrie $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16 - x^4}{(x + 2)(-x + 2)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x^2 + 2^2)(x + 2)(-x + 2)}{(x + 2)(-x + 2)}}$$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x^2 + 4)}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4) = +\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$g(x) - x = \sqrt{(x^2 + 4)} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{\sqrt{x^2 + 4} + x} \text{ car } \forall x \in]2; +\infty[, \sqrt{x^2 + 4} + x > 0$$

$$g(x) - x = \frac{\sqrt{x^2 + 4}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4) = +\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x = +\infty$

$$\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{4}{Y} = 0$$

Par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = 0$ ainsi la droite d'équation réduite $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C_g au voisinage de $+\infty$.

Par symétrie, $\mathcal{C}g$ admet une *asymptote oblique* d'équation réduite $y = -x$ au voisinage de $-\infty$.

$$\text{En effet, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$$

$$\text{car } \forall x \in]-\infty; -2[, \sqrt{x^2 + 4} - x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{Par composée de limites, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\text{Par somme de limites, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} - x = +\infty$$

$$\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{4}{Y} = 0$$

$$\text{Par composée de limites, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x = 0$$

4 - Soit la fonction \tilde{g} (prolongement par continuité de la fonction g sur \mathbb{R}).

La fonction \tilde{g} est-elle dérivable sur \mathbb{R} ? Si oui, calculer sa dérivée.

$$\text{La fonction } \tilde{g} \text{ définie par } \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\} \\ \tilde{g}(-2) = \tilde{g}(2) = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}$$

Soit $a(x) = (x^2 + 4)$, fonction définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans $[4; +\infty[$.

Soit $b(x) = \sqrt{x}$, fonction définie, continue et dérivable sur $[4; +\infty[$.

Par composée de fonctions usuelles, $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $\tilde{g} = b \circ a$ est dérivable sur \mathbb{R}

Soit \tilde{g}' la dérivée de \tilde{g} sur \mathbb{R} , avec pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

g est de la forme \sqrt{u} dont la dérivée est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 4$ et $u'(x) = 2x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$