Correction DM1 : (MVA902)

① $\mathcal{D}_g : \left\{ x \in \mathbb{R},\ \dfrac{16-x^4}{(x+2)(-x+2)} \geq 0,\ (x+2)(-x+2) \neq 0 \right\}$

$$\frac{16-x^4}{(x+2)(-x+2)} = \frac{(2-x)(2+x)(4+x^2)}{(x+2)(-x+2)}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(2-x)(2+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$4+x^2$		$+$		$+$		$+$	
$(x+2)(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\dfrac{16-x^4}{(x+2)(-x+2)}$		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$

$\mathcal{D}_g =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

② $\mathcal{D}_g =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 0[\cup \{0\} \cup]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$\mathcal{D}_g =]-\infty ; 2[\cup]-2 ; 0[\cup \{0\} \cup]0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$\mathcal{D}_g$ est centré en 0

$\forall x \in \mathcal{D}_g,\ -x \in \mathcal{D}_g$

$$g(-x) = \sqrt{\frac{16-(-x)^4}{(-x+2)(-(-x)+2)}}$$

$$g(-x) = \sqrt{\frac{16-x^4}{(-x+2)(x+2)}} \qquad g(-x) = g(x)$$

g est paire. $\mathcal{C}_g$ est symétique par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut restreindre l'étude au domaine d'étude $I = [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

③ $g(0) = \sqrt{\dfrac{16-0^4}{(0+2)(0+2)}} = 2$

Pour $x \in [0 ; 2[\cup]2 ; +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x^2+4}$

d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} g(x) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

On peut prolonger par continuité en $x=2$ et $x=-2$ en posant

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{-2;2\} \\ 2\sqrt{2} & \text{pour } x = 2 \text{ ou } x=-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4}$$

$\lim_{x \to +\infty} x^2+4 = +\infty$ $\quad$ $\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$ par composée de limites.

Pour $x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$,

$$g(x) - x = \sqrt{x^2+4} - x$$

$\forall x \in [0;2[\cup]2;+\infty[$, $\quad \sqrt{x^2+4} + x \neq 0$

d'où $\quad g(x) - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+4} - x)(\sqrt{x^2+4} + x)}{\sqrt{x^2+4} + x}$

soit $\quad g(x) - x = \dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4} + x}$

$$g(x) - x = \frac{4}{\sqrt{x^2+4} + x}$$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+4} + x = +\infty$ par somme de limites.

$\lim_{Y \to +\infty} \dfrac{4}{Y} = 0$ d'où $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4} + x} = 0$

par composée de limites

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - x = 0$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

Par symétrie, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $-\infty$

Remarque : $g(x) + x = \sqrt{4 + x^2} + x$

$$g(x) + x = |x|\sqrt{\frac{4}{x^2} + 1} + x$$

Pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 0]$,

$|x| = -x$ d'où $g(x) - (-x) = x\left(1 - \sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)$

Soit $g(x) - (-x) = \dfrac{x\left(1 - \sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)}{1 + \sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$

$$g(x) - (-x) = \frac{x\left(1 - \frac{4}{x^2} - 1\right)}{1 + \sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}}$$

$$g(x) - (-x) = \frac{-4}{x\left(1 + \sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}\right)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2} + 1 = 1 \qquad \lim_{Z \to 1} \sqrt{Z} = 1$$

Par composée de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{4}{x^2} + 1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{T \to -\infty} \frac{-4}{T} = 0$; par composée de limites :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{x\left(1+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)} = 0$$

Soit $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - (-x) = 0$

④ $\tilde{g} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0;+\infty[\\ x \longmapsto \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-2;2\} \\ 2\sqrt{2} & \text{si } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases} \end{cases}$

$g(x) = \sqrt{x^2+4} = |x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$ pour $x \neq 0$

$\tilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in [0;+\infty[$, $x \xmapsto{a} x^2+4$ est une fonction définie, continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ comme fonction polynômiale de degré 2 et à valeurs dans $[4;+\infty[$.

$\forall x \in [4;+\infty[$, $x \xmapsto{b} \sqrt{x}$ est défini, continue et dérivable sur $[4;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[$, $\tilde{g}(x) = b \circ a\,(x)$

D'où $\tilde{g}$ définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Par symétrie, $\tilde{g}$ est définie, continue et dérivable sur $]-\infty;0[$.

Remarque : $\tilde{g}$ continue sur $\mathbb{R}$.

Il reste à vérifier la dérivabilité en 0

Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$$

$$\frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \frac{(\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)}{x(\sqrt{4+x^2}+2)}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\sqrt{4+x^2}+2 \neq 0$

$$\frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = \frac{4+x^2-4}{x(\sqrt{4+x^2}+2)} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}+2}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4+x^2}+2 = 4$

car $\lim\limits_{x \to 0} 4+x^2 = 4$, $\lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4+x^2} = 2$ par composée de limites.

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ d'où, par quotient de limites, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}+2} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0} = 0 = \tilde{g}'(0)$ d'où $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et $\tilde{g}'(0) = 0$.

$\tilde{g}$ est dérivable par conséquent sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(x) = \sqrt{x^2+4}$

$\tilde{g}$ est de la forme $\sqrt{u}$ dont la dérivée est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+4$

$u'(x) = 2x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{g}'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$