CNAM – *Paris* Avril 2009

MVA101

Analyse et calcul matriciel

Deuxième session d'examen

Tous documents autorisés. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (8 points)

Soient les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre l'équation $(M - 2I)X = 0$.
   En déduire une valeur propre et un vecteur propre de M.
2. Calculer l'inverse de $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Vérifier que les colonnes de P sont des vecteurs propres de M.
   Sans autre calcul, dire quelle est la matrice $P^{-1}MP = D$.
4. Maintenant, on suppose que x_1, x_2 et x_3 sont des fonctions de la variable t telles que $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ et $x_3(0) = c$. Résoudre le système différentiel linéaire à coefficients constants $X'(t) = M\,X(t)$.

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction ***impaire*** définie sur $\mathbb{R}$, ***périodique*** de période $T = 4$, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{quand } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -1 & \text{quand } 1 < t < 2 \end{cases}$$

1. Dessiner la courbe représentative de $f(t)$ sur l'intervalle $[-2, 6]$. Que vaut $f(2)$?
2. À quoi sont égaux les coefficients de Fourier a_n ?
3. Calculer les coefficients de Fourier b_n puis écrire la série de Fourier de f.
4. Déterminer la somme de la série précédente quand $t = 2$.
   Le théorème de Dirichlet permettait-il de prédire le résultat ?
5. D'après le théorème de Dirichlet à quoi est égale la somme de la série de Fourier de f quand $t = 1$?
6. Rappeler le développement en série entière de $\arctan x$ au voisinage de $x = 0$. En admettant que ce développement converge lorsque $x = 1$, que vaut $A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?
7. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 3 (7 points)

Soit le système différentiel linéaire :

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \ \ 3x(t) + y(t) - 2z(t) \\
y'(t) &= \ \ 4x(t) + y(t) \\
z'(t) &= -2x(t) \qquad\quad + z(t)
\end{aligned}$$

dans lequel x, y et z vérifient les conditions initiales :

$$x(0) = 2 \qquad y(0) = 2 \qquad z(0) = -1$$

On note $U(p)$, $V(p)$ et $W(p)$ les transformées de Laplace de x, y et z.

1. Quelles équations vérifient $U(p)$, $V(p)$ et $W(p)$?
2. Résoudre ces équations.
3. Donner les solutions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du système différentiel.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆