Chapitre 3 — Intégrales curvilignes (suite)

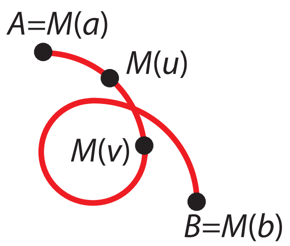
1 Longueur des courbes (suite)

1. On a vu que la longueur d'un *arc simple* plan AB parcouru par le point mobile $M(t)$ lorsque t varie de a à b est donnée par :

(2D) $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du}$ **(3D)** $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}\, du}$

Le calcul de la longueur d'une courbe s'appelle la *rectification*. Un arc de courbe qui a une longueur est un *arc rectifiable*.

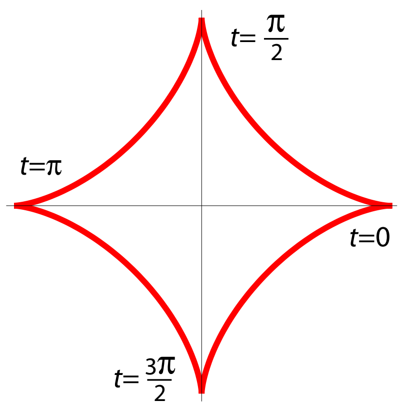
2. Une courbe présentant un *point double*, ou une *courbe fermée*, n'est pas un *arc simple*, pourtant, on peut calculer sa longueur de la même façon.



On découpe le segment $[a, b]$ en intervalles $[a, u]$, $[u, v]$, $[v, b]$ sur lesquels l'arc est simple et on fait la somme des intégrales correspondant à chaque intervalle, ce qui montre que la formule reste valable :

$$\int_a^u + \int_u^v + \int_v^b = \int_a^b$$

3. **Exemple** : Longueur de l'*astroïde*.



$$x(t) = R\,\cos(t)^3 \qquad y(t) = R\,\sin(t)^3$$

$$x'(t)^2 = 9R^2\sin(t)^2\cos(t)^4 \qquad y'(t)^2 = 9R^2\cos(t)^2\sin(t)^4$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 9R^2\sin(t)^2\cos(t)^2$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{9R^2}{4}\sin(2t)^2 \;\Rightarrow\; L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{9R^2}{4}\sin(2t)^2}\,dt$$

Attention : $L \neq \int_0^{2\pi}\frac{3R}{2}\sin(2t)\,dt = 0 \qquad L = \frac{3R}{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin(2t)\right|dt$.

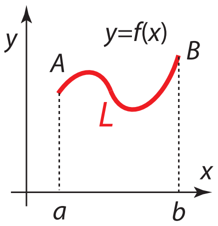
On se restreint à une branche de l'astroïde (pour que le sinus garde un signe constant) :

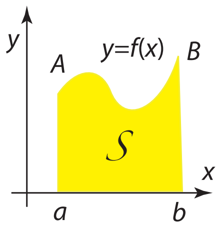
$$L = 4\left(\frac{3R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)\,dt\right) = 6R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)\,dt = 6R\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6R\left[\left(-\frac{\cos(\pi)}{2}\right)-\left(-\frac{\cos(0)}{2}\right)\right] = 6R$$

4. Soit f une fonction dérivable, admettant une dérivée continue sur l'intervalle $[a, b]$. Quelle est la longueur de sa courbe représentative ?

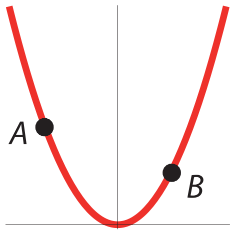
On paramètre la courbe en posant $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$, d'où : $\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(u)^2} du}$.

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(u)^2} du} \qquad \boxed{S = \int_a^b f(u) du}$$



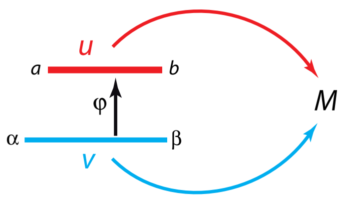


5. **Exemple** : Longueur d'un arc de la parabole $f(x) = x^2$



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + 4u^2}\, du = \left[\frac{t}{2}\sqrt{1 + 4u^2} + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{1 + 4u^2} + 2u\right)\right]_a^b$$

6. Indépendance du paramétrage.
La longueur d'un arc de courbe est définie sans référence à un calcul. On doit donc trouver le même résultat quel que soit le paramétrage, et quel que soit le calcul. On va se convaincre qu'il en est bien ainsi.



Si l'on a deux paramétrages de l'arc simple, une valeur de V donne un point M qui, à son tour, donne une valeur de u.
Il existe donc une fonction φ telle que $u = \varphi(v)$.

Par conséquent, si le paramétrage au moyen de u est défini par $(x_1(u), y_1(u))$, le paramétrage au moyen de v est défini par :

$$x_2(v) = x_1(\varphi(v)) \qquad y_2(v) = y_1(\varphi(v))$$

et, à cause de l'orientation, $\varphi'(v) > 0$.

Calcul avec u : $L = \int_a^b \sqrt{x_1'(u)^2 + y_1'(u)^2}\, du$

Calcul avec v : $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_2'(v)^2 + y_2'(v)^2}\, dv$ avec $x_2(v) = x_1(\varphi(v))$ et $y_2(v) = y_1(\varphi(v))$.

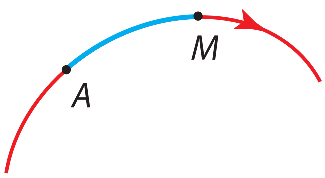
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(v)\, x_1'(\varphi(v))\right]^2 + \left[\varphi'(v)\, y_1'(\varphi(v))\right]^2}\, dv = \int_\alpha^\beta \sqrt{x_1'(\varphi(v))^2 + y_1'(\varphi(v))^2}\, \varphi'(v)\, dv = \int_a^b \sqrt{x_1'(u)^2 + y_1'(u)^2}\, du$$

2 Abscisse curviligne

1. Soit un *arc simple, orienté, rectifiable* sur lequel on choisit un point A qui va servir d'*origine*.

Si M est un point de l'arc, on note $L(AM)$ la longueur de l'arc AM et on associe à M le nombre réel :

$$s(M) = \begin{cases} L(AM) & \text{si } M \text{ vient après } A \\ -L(AM) & \text{si } M \text{ vient avant } A \end{cases}$$

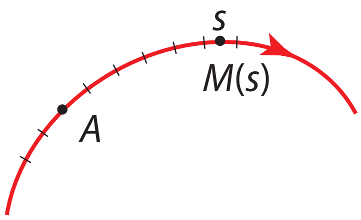


Le nombre $s(M)$ s'appelle l'*abscisse curviligne* de M.

$s(M)$ ne dépend que du choix de l'origine et de l'orientation : changer l'origine revient à ajouter une constante, renverser l'orientation revient à changer le signe.

2. On peut utiliser s pour paramétrer la courbe en notant $M(s)$ le point dont l'abscisse curviligne est égale à s.

C'est le paramétrage le plus *naturel*, uniquement lié à la *géométrie* de la courbe.



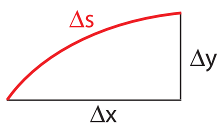
On va faire le lien entre ce paramétrage et un paramétrage quelconque. On part d'un arc simple paramétré au moyen de deux fonctions $x(t), y(t)$ dérivables ayant leur dérivée continue.

On suppose que $\vec{V}(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath}$ ne s'annule jamais et que l'arc est *orienté* dans le sens du paramètre. Si $s(t)$ est l'abscisse curviligne de $M(t)$:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{\left(x'(t)dt\right)^2 + \left(y'(t)dt\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \Rightarrow \boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2}$. En coordonnées polaires $\boxed{ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}$.

C'est la version différentielle de $\Delta s^2 \approx \Delta x^2 + \Delta y^2$

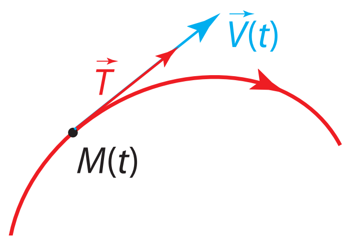


3. On a d'autres formules.

$$\vec{V}(t) = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{V}(t)\right\| = x'(t)^2 + y'(t)^2$$

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du \Rightarrow s(t) = \int_a^t \left\|\vec{V}(u)\right\| du \Rightarrow \boxed{ds = \left\|\vec{V}(t)\right\| dt}$$

4. On note $\vec{T}$ le vecteur *unitaire* porté par $\vec{V}(t)$:



$$\vec{T} = \frac{1}{\left\|\vec{V}(t)\right\|}\vec{V}(t)$$

$$\boxed{\vec{T}\,ds = \vec{V}(t)\,dt} \qquad \boxed{\overrightarrow{dM} = \vec{T}\,ds}$$

Le vecteur $\vec{T}$ est un *objet géométrique* attaché à la courbe. Il est là indépendamment de tout parcourt par un point mobile. La formule :

$$\boxed{\vec{V}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{T}}$$

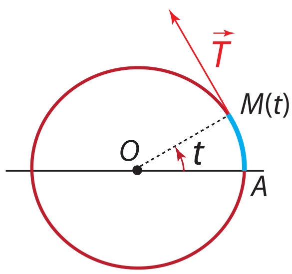
montre que le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$, donné par le paramétrage, est décomposé de deux parties :

- $\vec{T}$, un vecteur qui représente la géométrie de la courbe,
- $\frac{ds}{dt}$, qui représente la *vitesse de variation* de s quand t varie.

Remarque : Quand s, ou un de ses multiples, est choisi comme paramètre, $\frac{ds}{dt}$ est *constant* et le point mobile se déplace sur la courbe, avec un
mouvement uniforme.

5. **Exemple** : Le cercle de rayon 1 (*privé d'un point*).

Premier paramétrage : $-\pi < t < \pi \qquad x_1(t) = \cos(t) \qquad y_1(t) = \sin(t)$

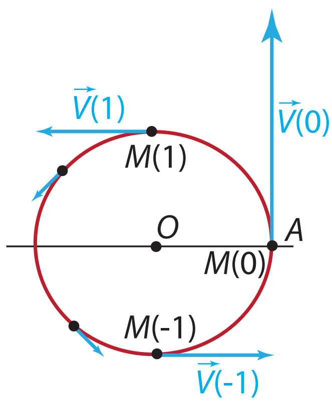


$$\overrightarrow{OM}(t) = \cos(t)\vec{\imath} + \sin(t)\vec{\jmath} = \vec{\imath}(t)$$

$$\vec{V}(t) = -\sin(t)\vec{\imath} + \cos(t)\vec{\jmath} = \vec{\jmath}(t)$$

$$\left\|\vec{V}(t)\right\| = 1 \qquad \vec{V}(t) = \vec{T} \qquad \boxed{s = t}$$

Second paramétrage : $-\infty < u < +\infty \qquad x_2(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad y_2(u) = \frac{2u}{1+u^2}$



$$\left\|\overrightarrow{OM}(u)\right\| = 1$$

$$\vec{V}(u) = -\frac{4u}{(1+u^2)^2}\vec{\imath} + \frac{2\left(1-u^2\right)}{(1+u^2)^2}\vec{\jmath}$$

$$\left\|\vec{V}(u)\right\| = \frac{2}{1+u^2} \qquad s = \int_0^u \frac{2}{1+v^2}\,dv$$

$$\boxed{s = 2\arctan(u)} \qquad \boxed{u = \tan\left(\frac{s}{2}\right)}$$

3 Intégrale curviligne

1. Soient f une fonction qui associe au point M le nombre $f(M)$ et Γ un *arc simple orienté*.

On appelle *intégrale de f le long de Γ* le nombre noté $\int_\Gamma f(M)\,ds$ qui se calcule de la façon suivante :

- on paramètre l'arc au moyen de fonctions $x(t)$, $y(t)$ et d'un intervalle $a \leqslant t \leqslant b$, (le paramétrage est choisi de façon à respecter l'orientation de l'arc),
- on calcule $\displaystyle\int_\Gamma f(M)\,ds = \int_a^b f(M(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$
- le résultat ne dépend pas du choix du paramétrage.

2. **Exemple** : La fonction f associe au point M son ordonnée : $f(M) = y$ et l'arc Γ est le demi cercle de rayon 1.

Premier paramétrage : $0 < t < \pi \qquad x_1(t) = \cos(t) \qquad y_1(t) = \sin(t)$

$$\int_\Gamma y\,ds = \int_0^\pi \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2$$

Second paramétrage : $0 < t < \infty \quad x_2(u) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \quad y_2(u) = \dfrac{2u}{1+u^2}$

$$\int_\Gamma y\,ds = \int_0^\infty \frac{2u}{(1+u^2)}\,\frac{2du}{(1+u^2)} = 2\int_0^\infty \frac{dw}{(1+w)^2} = 2$$

3. **Application** : Masse d'un fil de densité variable $\delta(M)$:

$$m = \int_\Gamma \delta(M)\,ds$$

4. **Propriétés des intégrales curvilignes**

- L'intégrale *change de signe* si on *change l'orientation* de la courbe.
- Pour un même arc orienté, *l'intégrale d'une combinaison linéaire* de fonctions est la *combinaison linéaire des intégrales*.
- Si l'on a 3 points A, B, Γ sur un arc orienté, l'intégrale de A à Γ est la somme des intégrales de A à B et de B à Γ.
- L'intégrale de la fonction 1 est la *longueur algébrique* de l'arc.
- L'intégrale curviligne est la limite des *sommes de Riemann* obtenues en découpant l'arc en petits arcs :

$$\int_\Gamma f(M)\,ds \approx f(M_1)\Delta s_1 + \cdots + f(M_n)\Delta s_n$$

5. La *valeur moyenne* d'une fonction f sur un arc orienté est :

$$\mu(f) = \frac{\displaystyle\int_\Gamma f(M)\,ds}{\displaystyle\int_\Gamma ds}$$

Elle ne dépend pas de l'orientation de la courbe.

Application : Les coordonnées du centre de gravité d'un fil de densité 1 est donnée sont :

$$x_G = \mu(x) \qquad y_G = \mu(y) \qquad z_G = \mu(z)$$

Exemple : Pour un fil en forme de demi-cercle, avec $R = 1$:

$$x_G = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t)\,dt = 0 \qquad y_G = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{2}{\pi}$$

6. Un champ de vecteurs est une fonction qui associe à chaque point M de l'espace un vecteur $\overrightarrow{U}(M)$. Si Γ est un arc orienté, la circulation de $\overrightarrow{U}$ le long de Γ est l'intégrale :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{U}(M)\cdot\overrightarrow{T}\,ds = \int_\Gamma \overrightarrow{U}(M)\cdot\overrightarrow{V}(t)\,dt$$

Cas particulier : Si $\overrightarrow{U}$ est le gradient d'une fonction f :

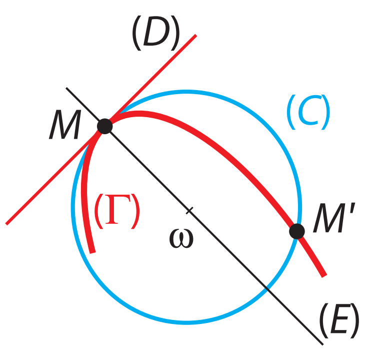
$$\overrightarrow{U}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\,\overrightarrow{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\,\overrightarrow{\jmath}$$

$$\overrightarrow{U}(M)\cdot\overrightarrow{V}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\ y'(t) = f\left(x(t), y(t)\right)'$$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{U}(M)\cdot\overrightarrow{V}(t)\,dt = \left[f\left(x(t), y(t)\right)\right]_a^b = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Théorème : La circulation du gradient de f le long d'un arc qui débute en A et qui finit en B est $f(B) - f(A)$. En particulier, si l'arc est fermé, $A = B$, et circulation est nulle.

4 Courbure



1. Soit D la tangente au point M d'une courbe Γ.

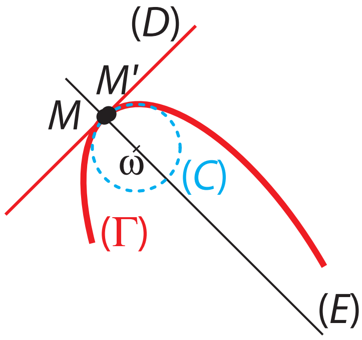
Les cercles passant par M, qui sont tangents à (D), sont les *cercles tangents* à la courbe Γ.

Leurs centres sont situés sur (E), la droite perpendiculaire à (D) au point M. On appelle (E) la *normale* à la courbe en M.

2. Pour déterminer un tel cercle, il suffit de se donner un point M' autre que M, et dire que le cercle passe par M'.

Le cercle limite obtenu en faisant tendre M' vers M s'appelle le *cercle ausculateur* à la courbe en M.

Son centre est le *centre de courbure* en M. Son rayon, R s'appelle le *rayon de courbure* en M.

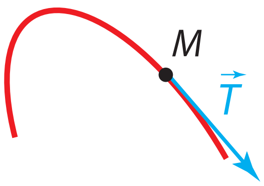


3. Parce que le vecteur $\overrightarrow{T}$ est *unitaire*, sa dérivée est perpendiculaire à $\overrightarrow{T}$. Elle est donc portée par (E), la normale à la courbe en M. Soit $\overrightarrow{N}$ le vecteur directeur unitaire de la normale tel que :

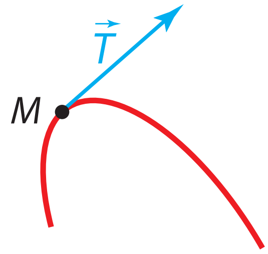
$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\,\overrightarrow{N}}$$

avec $\gamma \geqslant 0$. Ce nombre γ s'appelle la *courbure* au point M.

On démontre que $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{R}}$.



γ petit
R grand



γ grand
R petit

En écrivant que que $\overrightarrow{V}(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j}$, puis que $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{V}(t)\right\|}\overrightarrow{V}(t)$, et enfin que

$\gamma\,\overrightarrow{N} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{dt}\dfrac{dt}{ds}$, on obtient :

$$\boxed{R = \frac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}{\left|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)\right|}}$$

Dans le cas de la courbe représentative d'une fonction f la formule se simplifie un peu :

$$\boxed{R = \frac{\left(1 + f'(x)^2\right)^{3/2}}{\left|f''(x)\right|}}$$