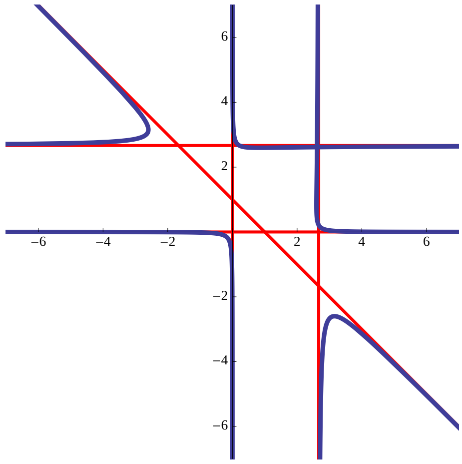
Chapitre 2 — Courbes paramétrées (suite)

1 Exercice

1. Voici la courbe représentative de : $x(t) = \dfrac{(t+1)^3}{t(2t+1)}$ $\qquad y(t) = \dfrac{1}{t\,(t^2-1)}$



Le but de l'exercice est de *reconstituer* les éléments de raisonnement qui ont conduit à ce tracé, notamment le tableau de variations.

2. On observe d'abord la présence de 10 branches infinies et 5 asymptotes. Les formules donnant $x(t)$ et $y(t)$ le confirment. Une au moins des deux fonctions devient infinie quand t s'approche de :

$$-\infty \qquad -1 \qquad -\frac{1}{2} \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$$

La première version du tableau de variations était donc :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$x(t)$					$\Vert$		$\Vert$				
$y(t)$			$\Vert$				$\Vert$		$\Vert$		

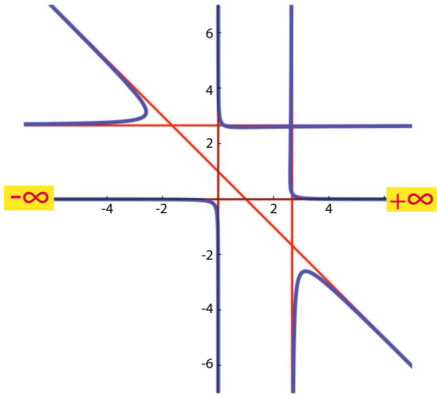
3. On va faire les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ en ces points.

$\boxed{t = \pm\infty}$ On écrit les développements limités de $x\Big(\dfrac{1}{h}\Big)$ et $y\Big(\dfrac{1}{h}\Big)$:

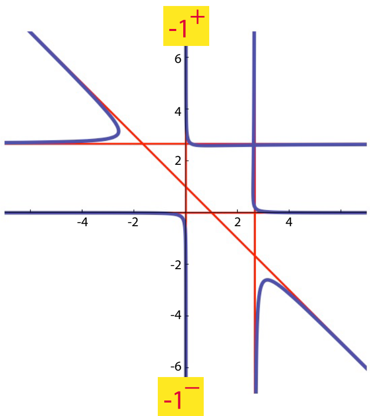
$$x\Big(\frac{1}{h}\Big) = \frac{(1+h)^3}{h(2+h)} = \frac{1}{2h} + \cdots \qquad y\Big(\frac{1}{h}\Big) = \frac{h^3}{1-h^2} = h^3 + \cdots$$

On en déduit leur développement limité $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t :

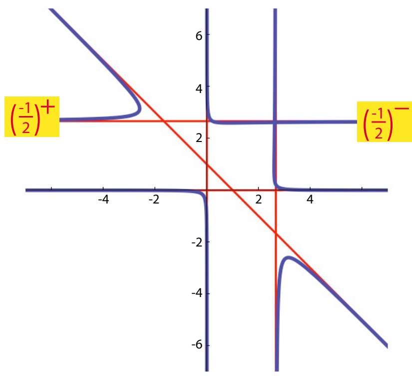
$$x(t) = \frac{t}{2} + \cdots \qquad y(t) = \frac{1}{t^3} + \cdots$$



$\boxed{t = -1}$ $\quad x(-1+h) = \dfrac{h^3}{(1-h)(1-2h)} = h^3 + \cdots \qquad y(-1+h) = \dfrac{1}{h(2-h)(1-h)} = \dfrac{1}{2h} + \cdots$

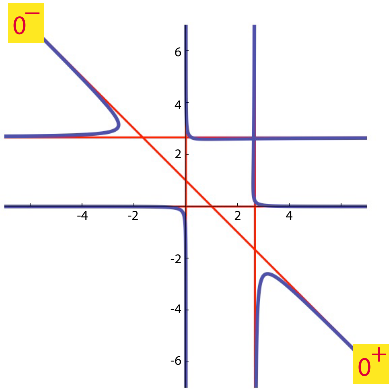


$\boxed{t = \dfrac{-1}{2}}$ $\quad x\Big(\dfrac{-1}{2}+h\Big) = \dfrac{(2h+1)^3}{8h(2h-1)} = \dfrac{-1}{8h} + \cdots \qquad y\Big(\dfrac{-1}{2}+h\Big) = \dfrac{8}{(2h-3)(4h^2-1)} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{16h}{3} + \cdots$

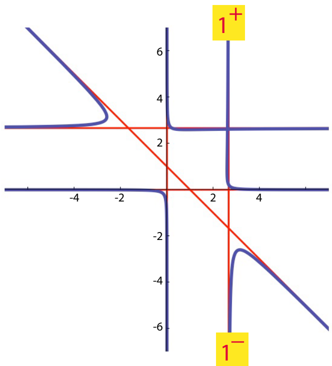


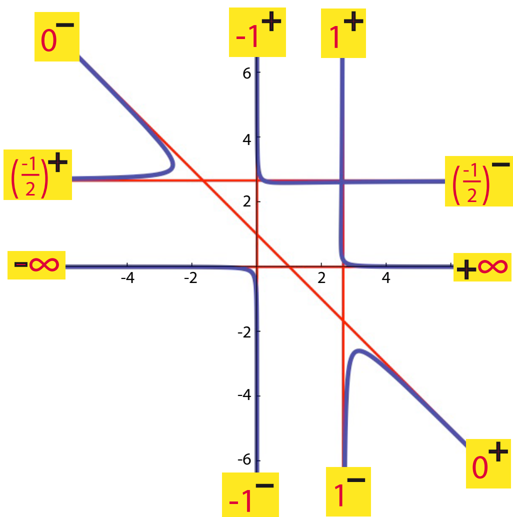
$\boxed{t=0}$ $\quad x(t) = \dfrac{(t+1)^3}{t(2t+1)} = \dfrac{1}{t} + 1 + t - t^2 + \cdots \qquad y(t) = \dfrac{1}{t\,(t^2-1)} = -\dfrac{1}{t} - t - t^3 + \cdots$

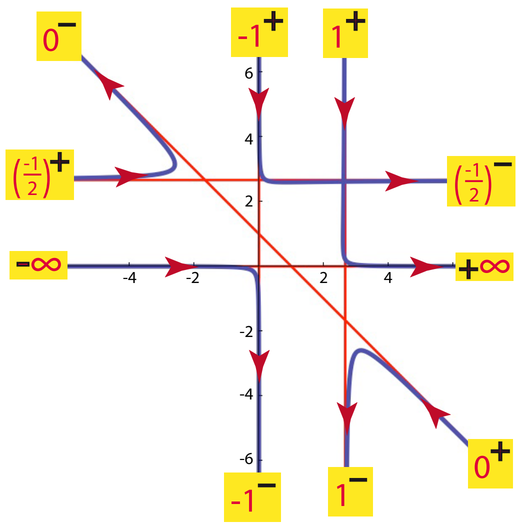
$\dfrac{y(t)}{x(t)} \to -1 \qquad y(t) + x(t) \to 1 \qquad y(t) = -x(t) + 1 - t^2 + \cdots$



$\boxed{t=1}$ $\quad x(1+h) = \dfrac{(h+2)^3}{(h+1)(2h+3)} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{4h}{9} + \cdots \qquad y(1+h) = \dfrac{1}{h(h+1)(h+2)} = \dfrac{1}{2h} + \cdots$







Maintenant, on peut *reconstituer* le *tableau de variations* :

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		?		0		?		1		$+\infty$
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	?	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$			$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{3}$			$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	?	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

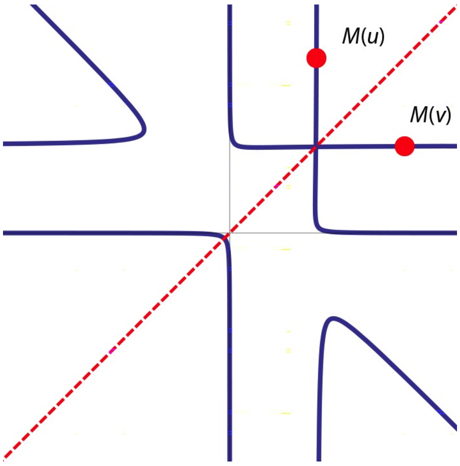
4. Des questions

Q 1 : Est-ce que la courbe fait des petites oscillations qu'on n'aurait pas vues ?

Q 2 : Est-ce que la courbe coupe ses asymptotes ?

- $y(t) = \dfrac{1}{t\,(t^2-1)} \neq 0$ quel que soit t
- $x(t) = \dfrac{(t+1)^3}{t(2t+1)} \neq 0$ quand $t \neq -1$
- $y(t) - \dfrac{8}{3} = \dfrac{(2t+1)\left(4t^2-2t-3\right)}{3t(1-t^2)} \neq 0$ quand $t \neq \dfrac{-1}{2}$
- $x(t) - \dfrac{8}{3} = \dfrac{(t-1)\left(3t^2-4t-3\right)}{3t(2t+1)} \neq 0$ quand $t \neq +1$
- $y(t) - x(t) - 1 = \dfrac{t^2\left(t^2+t+1\right)}{(t^2-1)(2t+1)} \neq 0$ quand $t \neq 0$

Q 3 : Est-ce que la courbe est *symétrique* par rapport à la droite $y = x$?



$$M(u) \to \quad x(u) \quad y(u)$$

$$M(v) \to \quad x(v) \quad y(v)$$

Symétrie $\begin{cases} x(u) = y(v) \\ y(u) = x(v) \end{cases}$

$$x(u) - y(v) = \frac{(u+1)^3}{u(2u+1)} - \frac{1}{v\,(v^2-1)} = \frac{(uv+u+v)\left(u^2v^2 - u^2v + 2uv^2 - uv - 2u + v^2 - 1\right)}{uv(2u+1)(1-v^2)}$$

$$x(v) - y(u) = \frac{(uv+u+v)\left(u^2v^2 - v^2u + 2vu^2 - uv - 2v + u^2 - 1\right)}{uv(2v+1)(1-u^2)}$$

Conclusion : Si $uv + u + v = 0$ les points $M(u)$ et $M(v)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5. Il resterait à chercher les coordonnées du *point double* . . .

2 Courbes de Lissajous

1. Les *courbes de Lissajous* sont les courbes admettant un paramétrage du type :

$$x(t) = \sin(t) \qquad y(t) = \sin(\alpha t + \varphi)$$

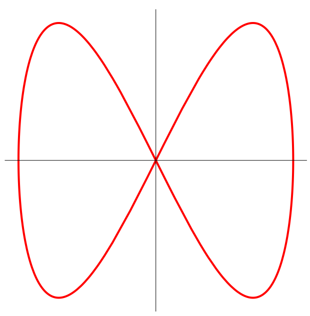
avec $\alpha \neq 0$ et φ quelconque.

Exemple :

La *lemniscate de Gerono*

$$x(t) = \sin(t)$$

$$y(t) = \sin(2t)$$



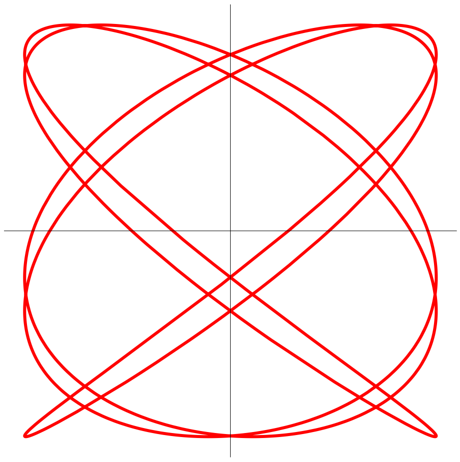
2. Une courbe de Lissajous est contenue dans un carré.

Les courbes de Lissajous n'ont donc *pas de branches infinies*, mais comme elles tournent enfermées dans un carré, il leur arrive d'avoir des *points multiples* .

3. Quand $\alpha = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel, la courbes de Lissajous se *referme* : c'est une *courbe fermée* sur laquelle le point mobile repasse indéfiniment et *périodiquement* :

$$\left.\begin{aligned} \sin(t + q2\pi) &= \sin(t) \\ \sin\left(\frac{p}{q}(t + q2\pi) + \varphi\right) &= \sin\left(\frac{p}{q}t + \varphi\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(t{+}q2\pi) = M(t)$$

Exemple : $\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\varphi = \dfrac{3\pi}{11}$

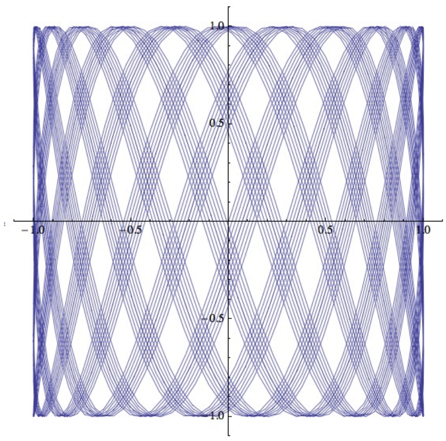


Quand α n'est pas un nombre rationnel, la courbe ne se referme pas et, plus t augmente, plus on a l'impression que le point mobile *remplit le carré* .

Exemple :

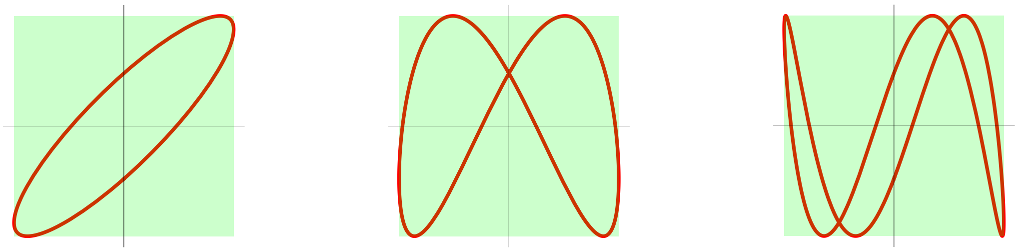
$\alpha = \pi$

$\varphi = 0$

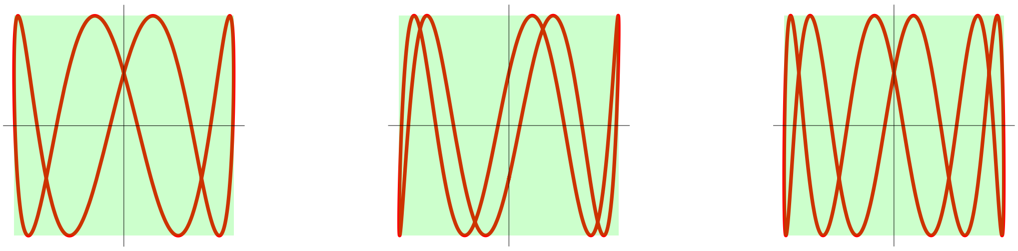


4. Dorénavant α est un entier et on cherche les symétries des courbes.

Exemples : $x(t) = \sin(t)$ $\qquad$ $y(t) = \sin(nt + 0,5)$



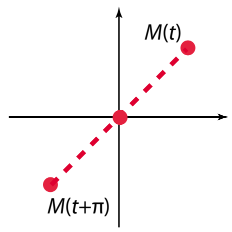
n=1 n=2 n=3



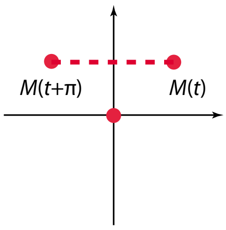
n=4 n=5 n=6

$x(t + \pi) = \sin(t + \pi) = -\sin(t) = -x(t)$

$y(t + \pi) = \sin(nt + n\pi + \varphi) = (-1)^n \sin(nt + \varphi) = (-1)^n y(t)$

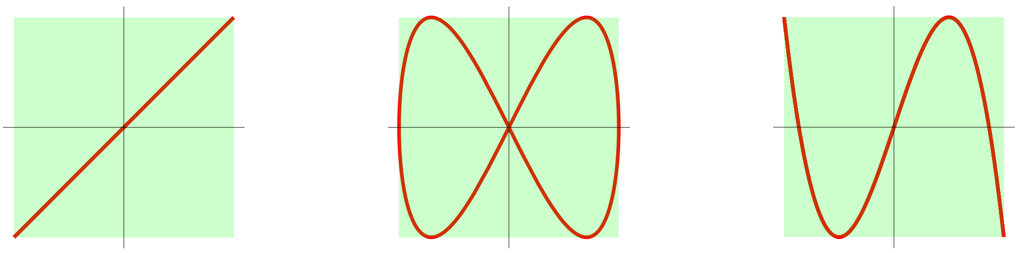


• Si n est *impair* , la courbe possède une *symétrie centrale*.

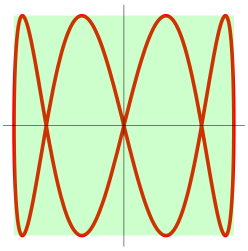


• Si n est *pair* , la courbe possède une *symétrie* par rapport à l'axe des y.

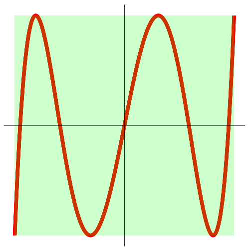
5. Dans le cas particulier $\boxed{\varphi = 0}$ et $\boxed{n \text{ pair}}$, les courbes ont encore plus de symétries.



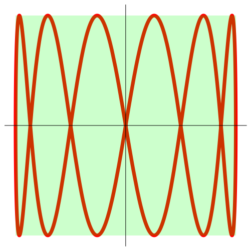
n=1 n=2 n=3



n=4



n=5



n=6

$$x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin(t) = x(t)$$

$$y(\pi - t) = \sin(n\pi - nt) = -(-1)^n \sin(nt) = -(-1)^n y(t)$$

- Si n est *pair* , la courbe possède une *symétrie* par rapport à l'axe des x.
- En la combinant avec la symétrie par rapport à l'axe des y, on obtient une *symétrie centrale* .

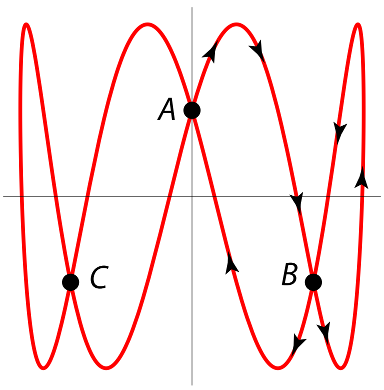
$$x(2\pi - t) = \sin(2\pi - t) = -\sin(t) = -x(t)$$

$$y(2\pi - t) = \sin(2n\pi - nt) = -\sin(nt) = -y(t)$$

Remarque : Lorsque n est *impair* , la courbe $\big(\sin(t), \sin(nt)\big)$ représente un *polynôme* de degré n .

6. **Exercice** : Trouver les coordonnées des *points doubles* de la courbe :

$$x(t) = \sin(t) \qquad\qquad y(t) = \sin(4t + \frac{\pi}{6})$$



- $A = M(0) = M(\pi) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$
- B et C sont symétriques par rapport à l'axe vertical.
- $B = M(u) = M(v)$ avec : $\begin{cases} u \neq v \\ 0 < u < \pi \\ 0 < v < \pi \end{cases}$

Rappels : (La lettre k désigne un *entier relatif*).

$$\begin{array}{lcl} \alpha = \beta + k2\pi & \Rightarrow & \sin(\alpha) = \sin(\beta) \\ \alpha = \pi - \beta + k2\pi & \Rightarrow & \sin(\alpha) = \sin(\beta) \end{array} \qquad \sin(\alpha) = \sin(\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + k2\pi \\ \textit{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + k2\pi \end{cases}$$

Recherche du point B

$$M(u) = M(v) \iff \begin{cases} \sin(u) = \sin(v) \\ \textit{et} \\ \sin\left(4u + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(4v + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Peut-on avoir $u = v + k2\pi$?

$$\left.\begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ \\ 0 < v < \pi \end{array}\right\} \Rightarrow -\pi < u - v < \pi \Rightarrow \quad \text{Non}$$

Peut-on avoir $u = \pi - v + k2\pi$?

$$\left.\begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ \\ 0 < v < 2pi \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < u + v < 2\pi \Rightarrow u + v = \pi \Rightarrow \boxed{v = \pi - u}$$

Dans ce cas :

$$\sin\left(4u + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(4v + \frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\left(4u + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(4\pi - 4u + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-4u + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(4u + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-4u + \frac{\pi}{6}\right)$$

Soit $4u + \frac{\pi}{6} = -4u + \frac{\pi}{6}$ ($1^{\text{ère}}$ possibilité), soit $4u + \frac{\pi}{6} = \pi + 4u - \frac{\pi}{6}$ (2^{de} possibilité).

2^{de} possibilité : $4u + \frac{\pi}{6} = \pi + 4u - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow -\frac{2\pi}{3} = k2\pi \Rightarrow$ *Non*

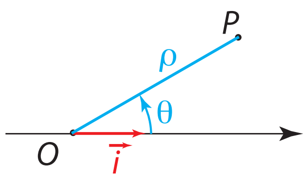
$1^{\text{ère}}$ possibilité : $4u + \frac{\pi}{6} = -4u + \frac{\pi}{6} + k2\pi \Rightarrow \boxed{u = k\frac{\pi}{4}}$

- $k = 1$ $\quad u = \frac{\pi}{4} \quad v = \frac{3\pi}{4} \quad M(u) = M(v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
- $k = 2$ $\quad u = \frac{\pi}{2} \quad v = \frac{\pi}{2} \quad \cancel{u = v}$
- $k = 3$ $\quad u = \frac{3\pi}{4} \quad v = \frac{\pi}{4} \quad M(u) = M(v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

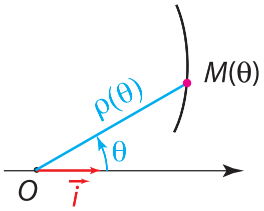
Conclusion : $A = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right) \quad C = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

3 Courbes en polaires

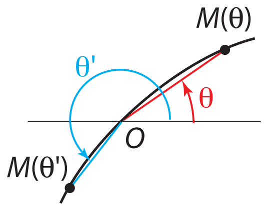
1. Dans le plan muni d'un repère *orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on peut repérer les points par leurs *coordonnées polaires* .



L'idée est donc de repérer les points d'une courbe en prenant θ pour paramètre.



Il faut se rappeler que pour un point donné, θ n'est défini qu'à 2π près. Il faudra donc faire appel à la *continuité* pour que deux points voisins de la courbe aient des θ voisins. Cependant, si la courbe *traverse l'origine* , cela pose problème :



La solution consiste à accepter des *valeurs négatives* de ρ .

2. On se donne une fonction ρ (de signe quelconque). La courbe définie en *polaires* par $\rho(\theta)$ est la trajectoire du point mobile $M(\theta)$:

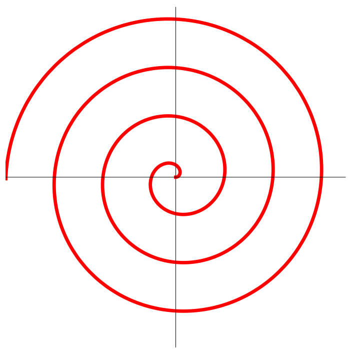
$$x(\theta) = \rho(\theta)\,\cos(\theta) \qquad\qquad y(\theta) = \rho(\theta)\,\sin(\theta)$$

Exemple 1 : $\rho(\theta) = C$ donne un *cercle* centré à l'origine.

Exemple 2 : $\rho(\theta) = \dfrac{C}{\cos(\theta)}$ donne une *droite* verticale.

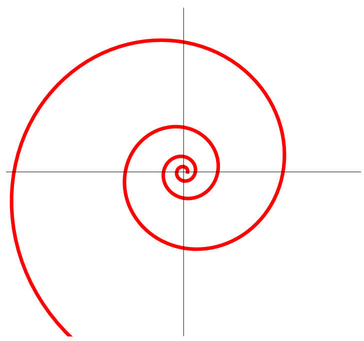
Exemple 3 : $\rho(\theta) = \dfrac{C}{1 + e\cos(\theta)}$ donne une *conique* : une *ellipse* quand $e < 1$, une *parabole* quand $e = 1$, une *hyperbole* quand $e > 1$

Exemple 4 : Les *spirales* :



$\rho(\theta) = C\,\theta$

spirale d'Archimède



$\rho(\theta) = e^{C\,\theta}$

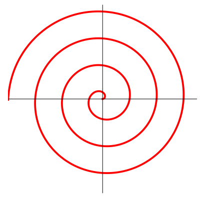
spirale logarithmique

Remarque : Remplacer $\rho(\theta)$ par $\rho(\theta - \alpha)$ revient à faire tourner la courbe d'un angle α .

3. Le tracé des courbes en polaires est un cas particulier de tracé de courbes paramétriques, mais il a ses spécificités.

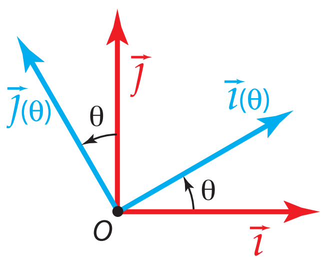
D'un point de vue concret, on peut imaginer un *plateau tournant* sur lequel est dessinée une *droite graduée* ayant pour origine le point de rotation.
Pendant que le plateau tourne à vitesse constante, un point coulisse sur la droite graduée de façon qu'au temps t , son abscisse soit $\rho(t)$.
La courbe définie en polaires par ρ est la trace du point sur le plan fixe.

Exemple : Un enfant marche en *ligne droite* sur le plateau d'un manège en allant du centre vers le bord de façon *uniforme* . Sa trajectoire par rapport au sol est une *spirale d'Archimède* .



4. Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On pose :

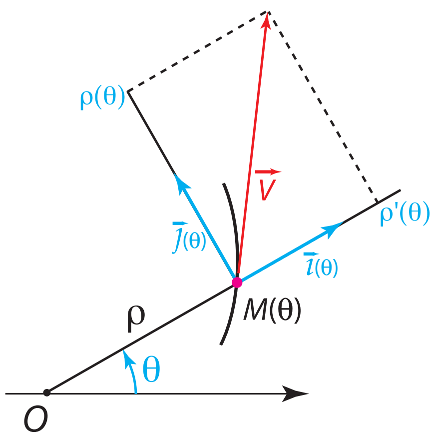
$$\underbrace{\boxed{\vec{\imath}(\theta) = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}}}_{\text{vecteur } radial} \qquad \underbrace{\boxed{\vec{\jmath}(\theta) = -\sin(\theta)\vec{\imath} + \cos(\theta)\vec{\jmath}}}_{\text{vecteur } orthoradial}$$



$$\boxed{\vec{\imath}\,'(\theta) = \vec{\jmath}(\theta)}$$

$$\vec{\jmath}(\theta) = \vec{\imath}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{\imath}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{\imath}(\theta) + \rho(\theta)\vec{\jmath}(\theta)}$$



• Si $\rho(\theta)$ varie très vite, $\rho'(\theta)$ a une grande valeur absolue et la courbe croise fortement le vecteur orthonormal.

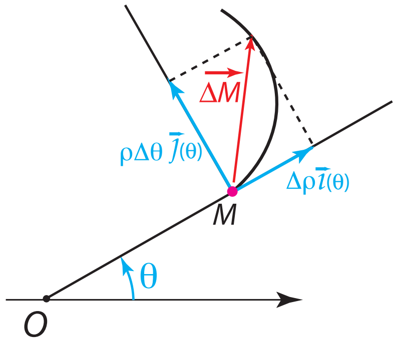
• Si $\rho(\theta)$ ne varie pas beaucoup, $\rho'(\theta)$ est presque nul. La courbe est tangente au vecteur orthonormal, donc perpendiculaire au vecteur radial.

$$\boxed{\vec{V}(\theta) = \rho'(\theta)\,\vec{\imath}(\theta) + \rho(\theta)\,\vec{\jmath}(\theta)}$$

$$\frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta\theta} = \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}\,\vec{\imath}(\theta) + \rho\,\vec{\jmath}(\theta)$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta M} = \Delta\rho\,\vec{\imath}(\theta) + \rho\,\Delta\theta\,\vec{\jmath}(\theta)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dM} = d\rho\,\vec{\imath}(\theta) + \rho\,d\theta\,\vec{\jmath}(\theta)}$$



Cas de l'origine :
Quand $\rho(\theta) = 0$, le point passe par l'origine et la tangente est la droite d'angle θ :

$$\boxed{\vec{V}(\theta) = \rho'(\theta)\,\vec{\imath}(\theta)}$$

5. Recherche des asymptotes

On reprend la méthode déjà vue pour les courbes paramétrées en supposant que $x(\theta) = \rho(\theta)\,\cos(\theta)$ et $y(\theta) = \rho(\theta)\,\sin(\theta)$ tendent vers l'infini quand θ tend vers α .

Pour obtenir $y = ax + b$, l'équation de l'asymptote, il fallait d'abord chercher $a = \lim\limits_{\theta\to\alpha}\left(\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}\right)$ puis $b = \lim\limits_{\theta\to\alpha}\big(y(\theta) - a\,x(\theta)\big)$.

D'abord $\lim\limits_{\theta\to\alpha}\left(\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}\right) = \tan(\alpha)$, mais cette limite peut être infinie, par exemple quand $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. C'est pourquoi, à la place de $b = \lim\limits_{\theta\to\alpha}\big(y(\theta) - \tan(\alpha)\,x(\theta)\big)$, on calculera : $c = \lim\limits_{\theta\to\alpha}\big(y(\theta)\cos(\alpha) - x(\theta)\sin(\alpha)\big)$.

$$y(\theta)\cos(\alpha) - x(\theta)\sin(\alpha) = \rho(\theta)\big(\sin(\theta)\cos(\alpha) - \cos(\theta)\sin(\alpha)\big) = \rho(\theta)\,\sin(\theta - \alpha)$$

Résultat : Si $c = \lim\limits_{\theta\to\alpha}\rho(\theta)\,\sin(\theta - \alpha)$ existe, l'asymptote a pour équation cartésienne :

$$y(\theta)\cos(\alpha) - x(\theta)\sin(\alpha) = c$$

C'est la droite de vecteur directeur $\vec{\imath}(\alpha)$ qui passe par le point A tel que $\overrightarrow{OA} = c\,\vec{\jmath}(\alpha)$.