E D N° 3

Outils mathématiques de l'analyse des données

Exercice 1

1. Dans R^3 , montrer que les vecteurs V1 = (2 1 1) , V2 = (1 3 1) et V3 = (-2 1 3) sont linéairement indépendants.
2. Pour quelles valeurs de a les vecteurs V1 = (1 2 4) , V2 = (0 0 1) et V3 = (a 1 2) sont-ils dépendants.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer si elles existent A+C, AC, CA, AB, A', B' et vérifier que (BA)' = A'B'.

Exercice 3

Soient A et B des matrices carrés d'ordre n.

Exprimer (A + B)' et (AB)' en fonction de A' et B'.

On suppose A inversible. Comparer $(A')^{-1}$ et $(A^{-1})'$

Exercice 4

1. Rappeler la définition de la trace d'une matrice.
2. Soient A une matrice de dimension (p x q) et B une matrice de dimension (q x p) et C = AB et D = BA . Montrer que trace(C) = trace (D).
3. Application numérique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Soit P une matrice inversible. Que vaut la trace de la matrice P^{-1} A P ?.

Exercice 5

En utilisant les résultats de l'exercice 1, quelles sont parmi les matrices suivantes celles de plein rang : A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

1. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont orthogonales.
2. Soit C une matrice orthogonale. Montrer que det (C) = 1 ou que det (C) = -1. (Indications : utiliser les relations : C'C = I , det (AB) = det (A) det (B) , det (A') = det (A)).

Exercice 7

Soient A une matrice de dimension (p , q) et B une matrice de dimension (q, p). Montrer que AB et BA ont mêmes valeurs propres non nulles.

Cas particulier : Soient A et B deux matrices symétriques de dimension p. On suppose B inversible. Montrer que det (AB - λ I) = det (BA - λ I)).En déduire que si λ est une valeur propre non nulle de AB alors elle est aussi valeur propre de BA.

Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes : A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Les données suivantes représentent les réponses de cinq personnes à trois questions concernant leurs dernières vacances : Q_1 pour la durée des vacances en jours , Q_2 pour le nombre de kms parcourus , Q_3 pour la somme dépensée en francs.

Individu	Q_1	Q_2	Q_3
1	8	500	300
2	21	500	2000
3	30	4500	4500
4	30	4000	3500
5	20	500	4000

a) Calculer la distance euclidienne entre les individus 1 et 2. Que remarque-t-on?

b) Pour éviter que Q_2 et Q_3 aient plus d'importance que Q_1 , on peut diviser Q_2 et Q_3 par 100. Proposer une autre transformation des variables permettant d'éviter de privilégier Q_2 et Q_3 . Ecrire les métriques correspondant à ces transformations.

Exercice 10

5 skieurs mesurent le nombre de descentes effectuées sur les jours J1 J2 et J3. On a les résultats suivants dans une matrice X :

Skieurs	J1	J2	J3
S1	10	15	14
S2	15	10	13
S3	18	12	16
S4	12	20	17
S5	14	10	14

Pour comparer deux skieurs, on utilise à la fin de chaque journée le cumul des descentes effectuées. Les résultats sont dans la matrice Y :

Skieurs	J1	J1+J2	J1+J2+J3
S'1	10	25	39
S'2	15	25	38
S'3	18	30	46
S'4	12	32	49
S'5	14	24	38

1 Trouver la matrice T vérifiant Y = XT'.

2 En déduire la métrique M dite métrique du cumul.

3 Calculer la distance entre S1 et S2 en utilisant la métrique M et les données initiales dans X.

4 Calculer la distance entre S'1 et S'2 en utilisant la métrique I et les données transformées dans Y. Qu'observe –t-on ?

5 Généraliser la matrice de cumul si on considère des mesures sur p jours.

6 Le tableau suivant décrit 6 stations de ski par les 3 variables : l'altitude (AST), le nombre de pistes (PIS) , le prix forfait journée(PFJ) pour lesquelles on a les moyennes et écart type:

Station	AST	PIS	PFJ
LA MONGIE	1800	70	138
LES ROUSSES	1120	43	108
AVORIAZ	1800	44	168
LA CLUSAZ	1100	76	153
VAL THORENS	2300	54	148
VILLARD DE LANS	1050	32	135
MOYENNE	1403	55	154
ECART TYPE	325	16	36

Quelle transformation utilise-t-on pour centrer le nuage des individus ? Quelle métrique utilise-t-on pour comparer deux stations ?