MVA003

Corrigé du devoir n°2

Exercice 1

1°) **Combien y a-t-il de rangements possibles ?**
Ranger 8 objets distincts dans 4 boîtes distinctes revient à associer à chaque objet une boîte, donc chaque rangement est une application de A, l'ensemble des objets, vers B, l'ensemble des boîtes.
Le nombre de rangements possibles est donc le cardinal de B^A, l'ensemble des applications de A dans B. Et $|B^A| = |B|^{|A|} = 4^8$.
Autre raisonnement :
Pour chaque objet, on a 4 choix pour la boîte, donc il y a $4.4.4.4.4.4.4.4 = 4^8$ rangements.

2°) **Combien y a-t-il de rangements pour lesquels la première boîte contient 2 objets exactement?**
- Pour la première boîte, on choisit 2 objets parmi les 8, sans notion d'ordre : on a donc C_8^2 rangements pour la première boîte.
- Reste à ranger les 6 objets restants dans les 3 autres boîtes : il y a autant de choix que d'applications entre l'ensemble des 6 objets vers l'ensemble des 3 boîtes : 3^6.
A chaque rangement de la 1ère boîte, il y a 3^6 rangements dans les autres boîtes.
- Donc au total il y a $3^6 C_8^2 = \frac{3^6.8.7}{2} = 7.4.3^6 = 20412$

3°) **Combien y a-t-il de rangements pour lesquels chaque boîte contient 2 objets exactement ?**
Formons 4 groupes de 2 objets :
- Pour la 1ère boîte, on a C_8^2 façons de prendre 2 objets parmi 8 (sans notion d'ordre entre les 2 objets). Il reste alors 6 objets à ranger dans les 3 autres boîtes. - pour la 2ème boîte, on a C_6^2 façons de prendre 2 objets parmi 6 (sans notion d'ordre). Il reste alors 4 objets à ranger dans les 2 autres boîtes.
- pour la 3ème boîte, on a C_4^2 façons de prendre 2 objets parmi 4 (sans notion d'ordre). Il reste alors 2 objets à ranger dans la dernière boîte, ce que l'on fait (d'une seule façon).
- Ces choix sont successifs, il y a donc $C_8^2\ C_6^2\ C_4^2 = \frac{8.7}{2}\frac{6.5}{2}\frac{4.3}{2} = 2520$ rangements où chaque boîte contient 2 objets exactement.

4°) **Combien y a-t-il de rangements pour lesquels au moins une boîte est vide ?**
Au moins une boîte vide = 3 boîtes vides ou 2 boîtes vides exactement ou 1 boîte vide exactement.
* Il y a $C_4^3 = 4$ rangements laissant 3 boîtes vides.
* Pour chaque choix de 2 boîtes vides, il y a 2^8 rangements dont 2 laissent une autre boîte vide. Donc il y a $C_4^2(2^8 - 2) = 6(2^8 - 2)$ rangements laissant 2 boîtes vides et 2 seulement.
* Parmi 3^8 rangements laissant une boîte choisie vide, il y en a $C_3^2 = 3$ laissant 3 boîtes vides exactement (dont la boîte choisie), et il y a $C_3^2(2^8 - 2) = 3.2^8 - 6$ laissant 2 boîtes vides exactement (dont la boîte choisie). On en déduit qu'il y a $C_4^1(3^8 - 3.2^8 + 3)$ rangements laissant seulement une boîte vide.
Finalement, on a $C_4^3 + C_4^2(2^8 - 2) + C_4^1(3^8 - 3.2^8 + 3) = 4 + 12(3^7 - 2^7) = 24712$ rangements pour lesquels 1 boîte (au moins 1) ne contient aucun objet.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

Un chef d'équipe doit répartir un groupe de quinze (15) personnes - sept (7) hommes et huit (8) femmes - en trois équipes, une équipe A de trois (3) personnes, une équipe B de cinq (5) personnes et une équipe C de sept (7) personnes.

1. **De combien de façons différentes peut-il composer les trois équipes ?**

   Pour constituer les trois équipes, le chef peut effectuer deux choix successifs :
   Il choisit les trois personnes de l'équipe A, ce qui revient à choisir une partie à trois éléments dans l'ensemble des quinze personnes. Chaque choix est donc une combinaison de trois éléments parmi quinze, et il y en a C_{15}^3 possibles.
   Puis il choisit les cinq personnes de l'équipe B, ce qui revient à choisir une partie à cinq éléments dans l'ensemble des douze personnes restantes. Il s'agit encore de combinaisons, et il a C_{12}^5 choix possibles.
   Il reste alors sept personnes, qui constitueront l'équipe C (plus de choix). Ces choix sont indépendants, puisque le nombre de personnes restant après le premier choix est le même (douze), quelles que soient les trois personnes choisies pour l'équipe A.
   On a trouvé : $\boxed{\text{Il y a } C_{15}^3 \times C_{12}^5 \text{ façons de composer les trois équipes}}$

Remarques

a) On a : $C_{15}^3 = \dfrac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} = 5 \times 7 \times 13 = 455$ et $C_{12}^5 = \dfrac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 9 \times 8 = 792$, d'où : $C_{15}^3 \times C_{12}^5 = 455 \times 792 = 360360$.
b) On pouvait choisir les équipes dans un ordre différent, par exemple d'abord B, puis C (et A étant constituée des trois personnes restantes). On obtient alors $C_{15}^5 \times C_{10}^7$ façons de composer les trois équipes. Mais, en utilisant la formule $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, on obtient :
$C_{15}^3 \times C_{12}^5 = \dfrac{15!}{3!12!} \times \dfrac{12!}{5!7!} = \dfrac{15!}{3!5!7!}$, et : $C_{15}^5 \times C_{10}^7 = \dfrac{15!}{5!10!} \times \dfrac{10!}{7!3!} = \dfrac{15!}{3!5!7!}$.
(voir aussi la question 4°))

2. **Que devient ce nombre de façons si l'équipe A ne peut comporter que des hommes, et l'équipe B que des femmes ?**

   Avec le même raisonnement, il n'y a plus que C_7^3 choix possibles pour l'équipe A, et C_8^5 choix possibles pour l'équipe B, et ces choix sont encore indépendants.
   Or $C_7^3 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35$ et $C_8^5 = C_8^3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8 \times 7 = 56$.
   D'où, cette fois : $\boxed{\text{Il y a } C_7^3 \times C_8^5 = 35 \times 56 = 1960 \text{ façons de composer les trois équipes}}$

3. **De combien de façons différentes peut-il maintenant composer trois nouvelles équipes, chacune de cinq (5) personnes ?**

   En employant encore le même raisonnement, on obtient cette fois : $C_{15}^5 \times C_{10}^5$ façons de composer les trois équipes.

   On a trouvé : $\boxed{\text{Il y a } C_{15}^5 \times C_{10}^5 \text{ façons de composer trois équipes de cinq personnes}}$

   Remarque En appliquant les formules comme dans la remarque précédente, ce nombre s'écrit aussi : $C_{15}^5 \times C_{10}^5 = \dfrac{15!}{5!10!} \times \dfrac{10!}{5!5!} = \dfrac{15!}{(5!)^3}(= 756756)$.

4. **Généraliser ce qui précède au cas d'un groupe de N personnes, les équipes A, B et C comportant respectivement a, b et c personnes (N et a, b, c sont des entiers non nuls, avec $N = a + b + c$)**

On effectue encore deux choix successifs :
On choisit les personnes de l'équipe A, ce qui donne (comme ci-dessus) C_N^a choix possibles.
Puis on choisit les personnes de l'équipe B parmi les $N - a$ personnes restantes, ce qui donne C_{N-a}^b choix possibles.
Pour les mêmes raisons qu'au 1°), ces choix sont indépendants, d'où le nombre total $C_N^a \times C_{N-a}^b$ de choix possibles. En utilisant les formules comme dans les remarques, ce nombre s'écrit : $C_N^a \times C_{N-a}^b = \dfrac{N!}{a!(N-a)!} \times \dfrac{(N-a)!}{b!(N-a-b)!} = \dfrac{N!}{a!b!c!}$ (en utilisant $N = a + b + c$).

On a trouvé : $\boxed{\text{Il y a } \dfrac{N!}{a!b!c!} \text{ façons de répartir les } N \text{ personnes}}$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆