

Corrigé du devoir n°2**Exercice 1. Une inéquation trigonométrique**

On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\sin(x) + \sin(2x) > 0$.

Soit $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$. f est périodique, de période 2π .

Il suffit donc d'en étudier le signe sur $[0, 2\pi]$.

Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on cherche donc x dans $[0, 2\pi]$ tel que : $\sin(x)(1 + 2\cos(x)) > 0$.

Etablissons un tableau de signes sur $[0, 2\pi]$.

$\sin(x) = 0$ en $0, \pi$ et 2π .

$1 + 2\cos(x) = 0$ si $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, soit en $\frac{2\pi}{3}$ et en $\frac{4\pi}{3}$.

D'où le tableau de signes :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
$\sin(x)$	0	+	+	0	-
$1 + 2\cos(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	0	+	0	-	+

D'où la conclusion : $\sin(x) + \sin(2x) > 0$ si et seulement si $x \in]0, \frac{2\pi}{3}[\cup]\pi, \frac{4\pi}{3}[$, à 2π près.

Exercice 2. Calcul d'intégrales

1. Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$ par changement de variable.

On pose : $u = \sin(x)$; $du = \cos(x)dx$

On a : $u(0) = 0$ et $u(\frac{\pi}{2}) = 1$.

$$\text{Donc : } I = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2. Calculons $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(\cos(x))^3 dx$ par changement de variable.

On pose : $u = \cos(x)$; $du = -\sin(x)dx$

On a : $u(0) = 1$ et $u(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$\text{On a alors : } J = \int_1^0 -u^3 du = \int_0^1 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Exercice 3. Calcul d'aire

On considère la fonction $f(x) = e^{-x} \sin(x)$.

Soit $F(x) = e^{-x}(a \sin(x) + b \cos(x))$.

F est une primitive de f si et seulement si $F' = f$.

On calcule : $F'(x) = e^{-x}(-a \sin(x) - b \cos(x) + a \cos(x) - b \sin(x)) = e^{-x}((-a-b) \sin(x) + (a-b) \cos(x))$

Comme $F'(x) = f(x)$, on en déduit que : $\begin{cases} -a-b = 1 \\ a-b = 0 \end{cases}$ soit :

$$\begin{cases} a = b \\ -b-b = 1 \end{cases}$$

Donc $a = b = -\frac{1}{2}$.

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$ est donc une primitive de $f(x)$.

Comme $f(x) > 0$ sur $]0, \pi[$, l'aire de la portion de plan délimitée par la représentation graphique de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$ est : $\int_0^\pi f(x) dx = F(\pi) - F(0) = \frac{1}{2}(e^{-\pi} + 1)$.