MVA101 **Analyse et Calcul Matriciel** **2015-2016**

CONTRÔLE du 10 Février 2016
Durée : 3h
CALCULATRICES, TÉLÉPHONES, ORDINATEURS, TABLETTES INTERDITS
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS

Il est demandé de bien justifier ses réponses. Les exercices suivants sont indépendants. Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet (2) en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

Exercice 1 : Séries numériques.
Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-n}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 2 : Séries entières.
Déterminer le rayon de convergence R des série entières suivantes et, le cas échéant, étudier la convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) x^n$

Exercice 3 : Série de Fourier.
On considère la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = x^2 - \pi^2, \qquad \text{pour } x \in]-\pi, \pi].$$

1. Déterminer la série de Fourier trigonométriques $S(f)$ de f ;
2. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme) ;
3. Calculer la valeur des séries numériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

Exercice 4 : Transformée de Fourier
Trouver la transformée de Fourier de la fonction

$$x^2 e^{-a|x|},$$

sachant que

$$\frac{d^p}{du^p} \mathcal{F}(f)(u) = (-i)^p \mathcal{F}(x^p f(x))(u),$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : Transformée de Laplace et Algèbre linéaire
(les 4 questions suivantes sont indépendantes)

1. Résoudre le système linéaire suivant en fonction du paramètre $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (3-p)X - 5Y & = 1 \\ X - (3+p)Y & = 2 \end{cases}$$

2. Trouver la fonction ayant pour transformée de Laplace :

$$p \mapsto \frac{7-p}{p^2-4}.$$

3. Trouver la fonction ayant pour transformée de Laplace :

$$p \mapsto \frac{5-2p}{p^2-4}.$$

4. On considère deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dérivables sur $[0, \infty[$, vérifiant pour tout $t \geq 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = 3x(t) - 5y(t), \\ \dot{y}(t) & = x(t) - 3y(t), \end{cases}$$

et telles que

$$\begin{cases} x(0) & = -1, \\ y(0) & = -2. \end{cases}$$

On note par X et Y les transformées de Laplace de $x(t)$ et $y(t)$ respectivement. Déterminer le système d'équations linéaires vérifiées par X et Y, déterminer X et Y et en déduire x et y.