Calcul matriciel

1 Définitions, notations

Définition 1 *Une* **matrice de format (m,n)** *est un tableau rectangulaire de mn* **éléments***, rangés en m* **lignes** *et n* **colonnes***.*

On utilise aussi la notation $m \times n$ pour le format. Lorsque $m = n$, on dit plutôt : **matrice carrée d'ordre n**. Si $m = 1$, on parle de **matrice-ligne d'ordre n**, et si $n = 1$, on parle de **matrice-colonne d'ordre m**.

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, et $L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$. A est une matrice carrée d'ordre 3. B est de format $(3, 2)$, C de format $(2, 3)$. D est une matrice-colonne d'ordre 3, et L une matrice-ligne d'ordre 3.

Conventions Chaque matrice est encadrée par des crochets - [ ] - ou des parenthèses - ( ), parfois par d'autres symboles (accolades, traits doubles, ...) : la seule notation non admise est le trait simple - | | - réservé aux déterminants.
Les éléments sont nommés en utilisant deux indices, **le premier est l'indice de ligne, le second est l'indice de colonne**. On note alors, par exemple : $A = [a_{i,j}]$.

Exemples : $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

Définition 2 *Deux matrices* **de même format***, $[a_{i,j}]$ et $[b_{i,j}]$, sont* **égales** *si et seulement si : $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout couple (i, j).*

Définition 3 *La* **diagonale** *d'une matrice $[a_{i,j}]$ est l'ensemble des éléments $a_{i,i}$.*

Exemples : $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \mathbf{a_{3,3}} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b_{1,1}} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & \mathbf{b_{2,2}} & b_{2,3} \end{bmatrix}$, et $C = \begin{bmatrix} \mathbf{c_{1,1}} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & \mathbf{c_{2,2}} \\ c_{3,1} & c_{3,2} \end{bmatrix}$.

2 Opérations

2.1 Transposition

Définition 4 *La* **transposée** *d'une matrice $A = [a_{i,j}]$ est la matrice $A^t = [a_{j,i}]$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.*

Ceci revient à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale de A.

Exemples : Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, alors : $C^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Propriétés
Si A est de format (m, n), alors A^t est de format (n, m). En particulier, si A est carrée d'ordre n, alors A^t a le même format. La transposée d'une matrice-colonne est une matrice-ligne, et réciproquement. Enfin, $(A^t)^t = A$ pour toute matrice A.

Définition 5 *Une matrice carrée A est dite* **symétrique** *si elle vérifie : $A^t = A$.*

2.2 Produit par un nombre

Définition 6 *Le* **produit** *d'une matrice $A = [a_{i,j}]$ par le nombre λ est la matrice :*
$\lambda A = [\lambda a_{i,j}]$. On dit aussi que λA est le **produit** *de A par le* **scalaire** *λ.*

Exemples : $3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, et $(-1)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Définition 7 *Pour chaque format (m, n), on note $0_{m,n}$ la* **matrice nulle***, dont tous les éléments sont nuls. Si le format est sous-entendu, on la note simplement* 0.

Propriétés
Les matrices A et λA ont toujours le même format. De plus : $\lambda(A^t) = (\lambda A)^t$.
Pour toute matrice A et tous scalaires λ et μ, on a : $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
Si $\lambda = 1$, on a bien entendu : $1A = A$, et si $\lambda = 0$, on obtient la matrice nulle.
Enfin, le produit λA n'est nul que si l'un des facteurs est nul :
$\lambda A = 0$ si est seulement si $\lambda = 0$ ou $A = 0$.*(ce produit est* **intègre***)*

2.3 Somme

Définition 8 *La* **somme de deux matrices de même format** *est définie par :*

$$[a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}].$$

Exemple : $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

Propriétés Pour A, B, C de même format, et des scalaires λ, μ :
$A + (B + C) = (A + B) + C$. *(la somme est associative)*
$A + B = B + A$. *(la somme est commutative)*
$A + 0 = 0 + A = A$. *(la matrice 0 est élément neutre)*
Toute matrice admet une opposée, $-A = (-1)A$.
$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$. *(le produit par un scalaire est distributif par rapport à la somme des matrices et par rapport à la somme des scalaires)*
$(A + B)^t = A^t + B^t$. *(la transposée d'une somme est la somme des transposées)*

2.4 Produit

2.4.1 Produit d'une matrice-ligne par une matrice-colonne

Définition 9 *Soit $X = [x_i]$ une matrice-ligne, et soit $Y = [y_i]$ une matrice-colonne* **de même ordre n***. Leur* **produit** *est le nombre : $XY = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$.*
(comme le résultat est un nombre, ce produit s'appelle aussi **produit scalaire** *de X par Y)*

Exemples : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32 \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b.$

2.4.2 Cas général

Définition 10 *Le* **produit** *de deux matrices n'est défini que si* **le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde**. *Si A est de format (m, n), et si B est de format (n, p), le produit $C = AB$ est la matrice de format (m, p) définie par : chaque élément $c_{i,j}$ de C est le produit de la ième ligne de A (considérée comme une matrice-ligne) par la jème colonne de B (considérée comme une matrice-colonne). Autrement dit, si $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$, alors, pour tous (i, j) :* $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}$.

En pratique, on dispose les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} \boxed{\begin{array}{l}\text{le “trou”}\\ \text{doit être}\\ \text{carré}\end{array}} & \begin{bmatrix}\text{deuxième}\\ \text{matrice}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\text{première}\\ \text{matrice}\\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\text{matrice}\\ \text{produit}\\ \text{(résultat)}\end{bmatrix} \end{array}$$

Exemples : $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -8 & -5 \\ 22 & 16 & 10 \\ -11 & -8 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Propriétés Pour A, B, C (telles que les produits existent), et des scalaires λ, μ :
$A(BC) = (AB)C$. *(le produit est associatif)*
$AB \neq BA$ en général. *(le produit n'est pas commutatif)*
$A0 = 0$ et $0A = 0$. *(chaque matrice nulle est élément absorbant)*
$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$. *(associativité généralisée)*
$(AB)^t = B^t A^t$. *(attention à l'ordre)*
$A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$. *(le produit est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme)*
Le produit AB peut être nul avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. *(le produit des matrices n'est pas intègre, voir exemple ci-dessus)*
En particulier, dans le calcul matriciel, on ne peut pas simplifier :
$AC = BC$ n'implique pas nécessairement $A = B$ *(l'hypothèse équivaut à $(A - B)C = 0$))*

3 Matrices carrées

Pour deux matrices carrées **de même ordre** A et B, la somme $A + B$ et les produits AB et BA existent toujours (on n'a plus à se soucier des conditions d'existence). Toutes les propriétés vues ci-dessus sont encore vraies, et le calcul matriciel ressemble beaucoup au calcul algébrique ordinaire, à deux exceptions près :

- le produit n'est pas commutatif,
- il n'est pas intègre.

Il n'y a donc pas, en général, d'identités remarquables ni de formules donnant les racines d'une équation matricielle. Les propriétés supplémentaires sont liées à l'existence d'un élément neutre pour le produit et d'inverses dans certains cas.

3.1 Matrices identités

Définition 11 *Pour chaque ordre n, on appelle* **matrice identité d'ordre n** *la matrice notée I_n définie par : $I_n = [\delta_{i,j}]$, avec : $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$,*
$\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ (symbole de KRONECKER).

Autrement dit, I_n n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Si l'ordre est implicite, on la note simplement I.

Exemple : $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Propriétés La matrice I_n est élément neutre du produit des matrices carrées d'ordre n : pour toute matrice carrée A d'ordre $n, AI_n = I_nA = A$.
Plus généralement, pour toute matrice A de format (n,p) : $I_nA = A$, et, pour toute matrice B de format (m,n) : $BI_n = B$.

Exemples : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$.

3.2 Matrices inverses

Définition 12 *On dit qu'une matrice carrée A est* **inversible** *si et seulement si il existe une matrice B (de même format) telle que : $AB = BA = I$.*
*B est alors appelée l'***inverse** *de A , et est notée A^{-1}.*

Exemples : Puisque $I^2 = I$, la matrice identité est sa propre inverse : $I^{-1} = I$.
Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, et si $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $AB = BA = I$, et donc $B = A^{-1}$.
Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et si $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors : $AB = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puisque AB n'est jamais égale à I(pour toute matrice B), la matrice A n'est pas inversible.

Propriétés Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.
(cette importante propriété montre qu'il est inutile, en pratique, de calculer AB et BA)
On en déduit que si A est inversible, alors son inverse est **unique**.
$(A^{-1})^{-1} = A$, autrement dit, A^{-1} est inversible, d'inverse A.
Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ *(attention à l'ordre).*
Si A est inversible et si $\lambda \neq 0$, alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
Si A est inversible, alors A^t l'est aussi, et : $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
(l'inverse de la transposée est la transposée de l'inverse)

Théorème 1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n , et soient X et B deux matrices-colonnes d'ordre n . Si A est inversible, alors le système $AX = B$ admet une solution unique, donnée par : $X = A^{-1}B$, quelle que soit la matrice-colonne B .*
Réciproquement, si le système $AX = B$ n'admet qu'une seule solution, pour une matrice-colonne quelconque B , alors A est inversible (et la solution est $X = A^{-1}B$).

On en déduit une méthode pratique pour calculer l'inverse d'une matrice, en résolvant un système d'équations. *[voir l'exercice 1]*

3.3 Matrices triangulaires et diagonales

Définition 13 *Une matrice carrée* $[a_{i,j}]$ *est* **triangulaire supérieure** *si tous les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls :* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i > j$ *.*
Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ *est* **triangulaire inférieure** *si tous les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls :* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i < j$ *.*
Une matrice carrée $[a_{i,j}]$ *est* **diagonale** *si tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls :* $a_{i,j} = 0$ *pour* $i \neq j$ *. (elle est donc à la fois triangulaire supérieure et inférieure)*

Exemples : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est triangulaire supérieure, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est triangulaire inférieure et $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ est diagonale.

Propriétés
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est stable par rapport aux opérations : somme, produit par un scalaire et produit matriciel.
De même pour l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est stable par rapport aux opérations : transposition, somme, produit par un scalaire et produit matriciel.
Si $A = [a_i]$ et $B = [b_i]$ sont diagonales d'ordre n , alors : $AB = BA = [a_i b_i]$.
Une matrice $A = [a_{i,j}]$, triangulaire ou diagonale, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls : $A = [a_{i,j}]$ inversible si et seulement si $a_{i,i} \neq 0$ pour tout i.
De plus, son inverse est du même type.

4 Exercices résolus

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ *Déterminer l'inverse de la matrice :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Posons $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, et $B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Le système $AX = B$ s'écrit :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases}$$

La troisième équation donne : $z = c$.
En reportant dans la deuxième, on obtient : $y = b - c$.

Puis dans la première : $x = a - (b - c) - c = a - b$. D'où : $\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ *On considère les matrices :*

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $N = A - I$ *, où* I *est la matrice identité d'ordre 3.*

1. Calculer N^2 *et* N^3*. En déduire* N^n *pour* n *entier,* $n \geq 3$*.*
2. En déduire une formule exprimant A^n *en fonction de* I*,* N *et* N^2 *pour* n *entier naturel.*
3. Déterminer des nombres a, b et c tels que la matrice $B = aI + bN + cN^2$ *vérifie :* $AB = I$*.*
En déduire la matrice A^{-1} *(inverse de A) en fonction de* I*,* N *et* N^2*.*
4. Calculer A^{-n} *pour* n *entier positif. En déduire* A^k *pour* k **entier relatif** *quelconque.*

1. On obtient : $\boxed{N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } N^3 = 0}$

Si $n \geq 4$, alors : $N^n = N^3 N^{n-3} = 0N^{n-3} = 0$. Finalement : $\boxed{N^n = 0 \text{ pour } n \geq 3}$

2. Puisque les matrices I et N commutent ($IN = NI$), on peut développer $A^n = (I + N)^n$ en utilisant la formule du binôme :
Pour $n \geq 2$, $A^n = (I+N)^n = I^n + C_n^1 I^{n-1} N + C_n^2 I^{n-2} N^2$ (les autres termes sont nuls d'après la question 1). On obtient ainsi : $\boxed{A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2}$

Le calcul précédent n'est valable que pour $n \geq 2$. Mais la formule trouvée est encore vraie pour $n = 1$ et $n = 0$, comme on le vérifie facilement ($A^0 = I$ par convention). En remplaçant les matrices par leurs valeurs, on obtient : $\boxed{A^n = \begin{bmatrix} 1 & -n & n^2 \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

3. En remplaçant les matrices A et B par leurs valeurs en fonction de I et N, on obtient :

$$AB = (I + N)(aI + bN + cN^2) = aI + (a + b)N + (b + c)N^2.$$

Une solution de $AB = I$ est donc donnée par les égalités : $a = 1$, $a + b = 0$, $b + c = 0$.
On en déduit les valeurs : $b = -1$ et $c = 1$, et la solution : $B = I - N + N^2$. Ce qui montre que A est inversible, son inverse étant : $\boxed{A^{-1} = I - N + N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

L'unicité de l'inverse d'une matrice nous assure de l'unicité de la solution trouvée.
4. Pour calculer $A^{-n} = (A^{-1})^n$, on peut procéder comme pour A^n au début de l'exercice : La matrice A^{-1} est de la forme $A^{-1} = I + M$, avec $M = N^2 - N$. On calcule les puissances de M :

$$M^2 = (N^2 - N)^2 = N^4 - 2N^3 + N^2 = N^2,$$
$$M^3 = MM^2 = (N^2 - N)N^2 = N^4 - N^3 = 0.$$

Les raisonnements et calculs faits pour N et A sont donc aussi valables pour M et A^{-1}. On en déduit : $A^{-n} = (A^{-1})^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2$: $\boxed{A^{-n} = I - nN + \frac{n(n+1)}{2}N^2}$

Comme pour A^n, cette formule est vérifiée pour tout entier naturel n. Si on l'écrit :

$$A^{-n} = I + (-n)N + \frac{(-n)(-n-1)}{2}N^2,$$

on constate qu'il s'agit de la formule trouvée à la question 2, avec $-n$ à la place de n.

D'où le résultat : $\boxed{A^k = I + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2, \text{ pour tout } k \text{ entier relatif}}$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ *On considère les matrices :* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Calculer A^2 *et* A^3.
2. Déterminer trois nombres entiers a, b *et* c *tels que :* $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$.
3. En déduire que A *est inversible, et écrire son inverse* A^{-1}.

1. On obtient : $\boxed{A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{bmatrix}}$

2. L'égalité $A^3 + aA^2 + bA + cI = 0$ donne les 7 relations :

$$\begin{array}{lcl} -2 + 2a + 2b + c & = & 0 \\ -5 - 3a - b & = & 0 \\ 5 + 3a + b & = & 0 \\ 1 + a + b + c & = & 0 \\ -4 - a & = & 0 \\ 10 + 6a + 2b & = & 0 \\ -7 - a + b + c & = & 0 \end{array}$$

La cinquième équation donne : $a = -4$, la deuxième : $b = 7$, et la quatrième : $c = -4$. Les autres équations sont alors aussi vérifiées.

La relation demandée est : $\boxed{A^3 - 4A^2 + 7A - 4I = 0}$

3. La relation précédente peut s'écrire : $A^3 - 4A^2 + 7A = 4I$,

ou encore, en divisant par 4 et en mettant A en facteur : $A(\frac{1}{4}A^2 - A + \frac{7}{4}I) = I$.

Étant de la forme $AB = I$, cette relation donne :

A est inversible et $A^{-1} = B = \frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I)$. D'où : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$

5 Exercices

Exercice 4 Soient A et B deux matrices carrées de même ordre vérifiant les deux conditions : $AB \neq 0$, et $BA = 0$, et soit $C = AB$.
1 - Calculer C^2.
2 - Est-ce que A et B sont inversibles?
3 - Si on fixe $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, trouver toutes les matrices B vérifiant les deux conditions : $AB \neq 0$, et $BA = 0$.

Exercice 5 Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
1 - Calculer M^n pour tout entier $n \geq 1$.
2 - Montrer que M est inversible, et déterminer M^{-1}.
3 - Déterminer toutes les matrices A telles que $AM = MA$.

Exercice 6 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Trouver toutes les matrices M telles que $AM = MA$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
1 - Calculer $A^2, /A^3$ et A^4.
2 - En déduire A^k pour tout entier $k \geq 1$.
3 - Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
4 - Calculer A^{-k} pour tout entier $k \geq 1$.

Exercice 8 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
1 - Calculer A^2, A^3, puis A^n (par récurrence).
2 - La matrice A est-elle inversible?

Exercice 9 Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.
1 - Peut-on trouver une matrice B de format $(3, 2)$ telle que $AB = I_2$?
2 - Peut-on trouver une matrice C de format $(3, 2)$ telle que $CA = I_3$?

Exercice 10 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
1 - Calculer A^2, puis $A^2 - A$.
2 - En déduire que A est inversible. Que vaut A^{-1}?