Eléments de correction du Devoir n°2

Exercice 1

Une association de parents d'élèves comprend 21 membres : 18 femmes et 3 hommes.

1. **L'association doit constituer un comité comprenant 4 personnes :**
   (a) **Combien y-a-t-il de comités possibles si tous les membres acceptent d'y participer ?** Un comité est constitué de 4 personnes parmi les 21 possibles. Il n'y a aucune notion d'ordre, il s'agit donc d'une combinaison de 4 personnes parmi 21 soit $C_{21}^4 = \dfrac{21.20.19.18}{4.3.2.1} = 7.5.19.9 = 5985$ comités possibles.

   (b) **Combien y-a-t-il de comités possibles si deux des membres refusent d'en faire partie ?** Si deux personnes annoncent refuser de faire partie du comité, il ne reste plus que 19 personnes disponibles, il y a donc $C_{19}^4 = \dfrac{19.18.17.16}{4.3.2.1} = 19.3.17.4 = 3876$ comités possibles.

   (c) **Combien y-a-t-il de comités possibles si deux des hommes refusent d'y participer ensemble ?** Si deux hommes déclarent ne pas vouloir participer simultanément il y a quatre cas possibles :

      i. aucun des trois hommes ne participe : on a choisi 4 femmes parmi 18, il y a $C_{18}^4 = \dfrac{18.17.16.15}{4.3.2.1} = 9.17.4.5 = 3060$ choix possibles.

      ii. exactement un des trois hommes participe : il y a trois choix possibles pour cet homme, les 3 autres personnes sont choisies parmi les 18 femmes : soit $3.C_{18}^3 = 3.\dfrac{18.17.16}{3.2.1} = 9.17.16 = 2448$ choix possibles.

      iii. exactement 2 hommes participent : comme deux des trois hommes ne veulent pas être ensemble, on doit forcément choisir le troisième homme et un des deux hommes qui ne veulent pas être ensemble. Il y a donc 2 choix pour les hommes et C_{18}^2 choix pour les femmes, donc en tout $2.\dfrac{18.17}{2.1} = 18.17 = 306$ choix possibles.

      iv. exactement 3 hommes participent : impossible puisque 2 d'entre eux ne veulent pas être ensemble.

   soit en tout $3060 + 2448 + 306 = 5814$ choix possibles.

   (d) **Combien y-a-t-il de comités possibles si un des hommes refuse d'y participer si une des femmes y siège ?** Il y a deux cas possibles :

      i. la femme en question ne siége pas : il y a $C_{20}^4 = \dfrac{20.19.18.17}{4.3.2.1} = 5.19.3.17 = 4845$ choix possibles de 4 personnes parmi les 20 disponibles.

      ii. la femme en question siège : il faut alors choisir les 3 autres membres du comité parmi les $21 - 2 = 19$ personnes disponibles (tous les membres de l'association moins la femme et l'homme) soit $C_{19}^3 = \dfrac{19.18.17}{3.2.1} = 19.3.17 = 969$ choix possibles.

   En tout il y a donc $4845 + 969 = 5814$ comités possibles.

   (e) **Combien y-a-t-il de comités possibles si l'association souhaite une parité hommes-femmes.** Dans ce cas il faut choisir 2 femmes parmi les 18 membres féminins, et 2 hommes parmi les 3 membres masculins, soit en tout : $C_{18}^2.C_3^2 = \dfrac{18.17}{2.1}.3 = 9.17.3 = 459$ comités possibles.

2. **L'association doit également constituer son bureau comprenant : un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier. Une même personne ne pouvant tenir à la fois deux postes différents.**
   (a) **Combien y-a-t-il de bureaux possibles si tous les membres acceptent d'y participer à n'importe quel poste ?** Dans ce cas il s'agit de choisir 4 personnes parmi les 21 membres mais avec un poste associé, c'est-à-dire avec un ordre. On a donc $A_{21}^4 = 21.20.19.18 = 143640$ bureaux possibles.
   (b) **Combien y-a-t-il de bureaux possibles si seul un homme accepte le poste de trésorier et une femme celui de président, les autres postes étant acceptés par 5 femmes ?** Si le poste de trésorier est accepté par un seul homme il y a un seul choix pour ce poste, de même si une seule femme accepte le poste de président il y a un seul choix pour ce poste, reste alors à trouver deux personnes parmi les 5 autres femmes pour les deux postes restants. En tout il y a donc $1.1.A_5^2 = 5.4 = 20$ bureaux possibles.
   (c) **Combien y-a-t-il bureaux possibles si seuls 2 hommes acceptent d'être président ou trésorier, 6 femmes acceptent le poste de vice-président et parmi elles 4 acceptent aussi d'être secrétaire.** Il n'y a que deux choix pour le poste de trésorier et celui de président (2 hommes pour deux postes). Il y a ensuite deux possibilités :
      i. soit on choisit en premier le vice-président : il y a 6 choix possibles. Pour deux d'entre eux (ceux pour lesquelles on a choisi une femme qui accepte seulement d'être vice-président) il y a ensuite 4 choix pour la secrétaire ; pour les 4 autres choix, il y seulement 3 choix pour la secrétaire puisqu'une même personne ne peut pas tenir deux postes différents. Il y a alors $2.4 + 4.3 = 20$ choix pour les deux dernières personnes donc 40 choix pour le bureau.
      ii. soit on choisit en premier le secrétaire : il y a 4 choix, restent alors 5 choix pour le poste de vice président. donc en tout 20 choix pour les deux dernières personnes donc 40 choix pour le bureau.

   Mais clairement quelque soit la méthode choisie, les deux méthodes conduisent aux mêmes bureaux.

Exercice 2 (Extrait Deuxième session FOD 2009-2010)

On définit sur l'ensemble $E = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (3,0)\}$, une relation notée $\mathcal{R}$ par :

$$\text{si } x = (x_1, x_2) \text{ et } y = (y_1, y_2) : \quad x\mathcal{R}y \quad \text{si et seulement si} \quad x_1 \leq y_1 \text{ et } x_1 + x_2 \text{ divise } y_1 + y_2$$

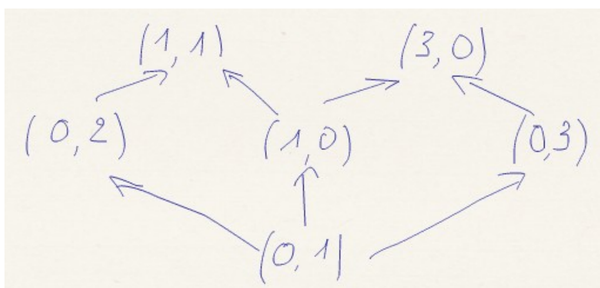
Par exemple : $(0,2)\mathcal{R}(1,1)$ car $0 \leq 1$ et $0 + 2$ divise $1 + 1$.

1. **Déterminer le diagramme cartésien de $(E, \mathcal{R})$.**

	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(3,0)$
$(0,1)$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$(0,2)$		$\times$			$\times$	
$(0,3)$			$\times$			$\times$
$(1,0)$				$\times$	$\times$	$\times$
$(1,1)$					$\times$	
$(3,0)$						$\times$

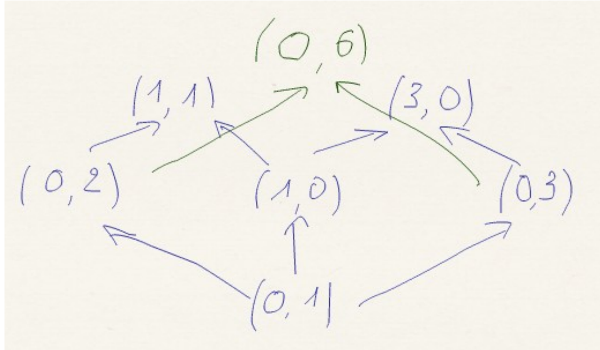
2. **Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d' ordre sur E .** $\mathcal{R}$ est réflexive puisque la diagonale du diagramme cartésien est totalement remplie.
   $\mathcal{R}$ est antisymétrique puisque toutes les cases cochées dans le diagramme cartésien sont situées au dessus de la diagonale.
   Pour vérifier la transitivité il faut vérifier que pour tous les triplets $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ on a bien $x\mathcal{R}z$.
   - Il est inutile de considérer $x = (0, 1)$ puisque $(0, 1)$ est en relation avec tous les éléments de E.
   - si $x = (0, 2)$: $(0, 2)$ est en relation avec lui même et $(1, 1)$. Mais $(1, 1)$ est seulement en relation avec lui même.
   - si $x = (0, 3)$: $(0, 3)$ est en relation avec lui même et $(3, 0)$. Mais $(3, 0)$ est seulement en relation avec lui même.
   - si $x = (1, 0)$: $(1, 0)$ est en relation avec lui même, avec $(1, 1)$ qui est seulement en relation avec lui même, et avec $(3, 0)$ qui lui aussi est seulement en relation avec lui même.
   - $(1, 1)$ et $(3, 0)$ sont seulement en relation avec eux mêmes.

   La relation est réflexive, antisymétrique, transitive c'est bien une relation d'ordre.
3. **L'ensemble E muni de $\mathcal{R}$ possède-t-il un plus grand élément ?** non car aucun élément n'a sa colonne totalement cochée dans le diagramme cartésien, ou bien aucun élément ne majore tous les élément de E. **un plus petit élément ?** oui, il s'agit de $(0, 1)$ car sa ligne dans le diagramme cartésien est pleine, il minore tous les éléments de E.
   Quels sont les éléments minimaux et maximaux ? $(0, 1)$ est le seul élément minimal (il est le seul a ne pas être minoré), $(1, 1)$ et $(3, 0)$ sont deux éléments maximaux : ils ne sont majorés par aucun autre élément de E, il y a une seule croix dans leurs lignes respectives dans le diagramme cartésien.
4. **Dessiner le diagramme de Hasse,**



5. **Construire un élément $(0, p)$ tel que $(0, 2) \vee (0, 3) = (0, p)$: écrire les conditions que doit vérifier p , puis proposer une solution.** Pour que $(0, p)$ soit le sup de $(0, 2)$ et $(0, 3)$, il faut que $(0, p)$ soit :
   - un majorant de $(0, 2)$, il faut donc que 2 divise p,
   - un majorant de $(0, 3)$, il faut donc aussi que 3 divise p,
   - que ce soit le plus petit des majorants communs aux deux, on prend donc le plus petit multiple commun à 2 et 3, soit $p = 6$.

   Dessiner le diagramme de Hasse de F où $F = E \cup \{(0, p)\}$ il suffit de rajouter le couple $(0, 6)$ au diagramme précédent :



6. E **muni de $\mathcal{R}$ est-il un treillis ? même question pour F.** Dans les deux cas $(1,1)$ et $(3,0)$ n'ont pas de sup, ni E ni F munis de $\mathcal{R}$ ne sont un treillis.

✯✯✯✯✯✯