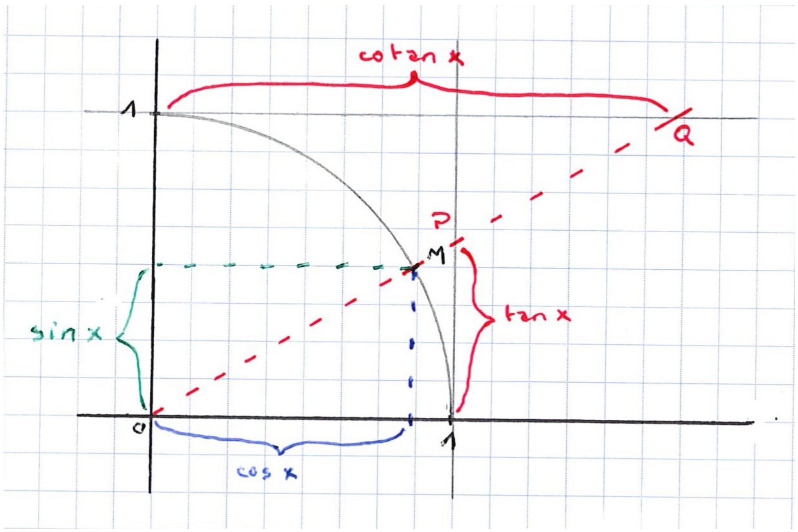
Etude des fonctions usuelles ($3^{\text{ème}}$ partie)

Fonctions circulaires

Les fonctions circulaires sont les fonctions cosinus (cos), sinus (sin), tangente (tan) et cotangente (cotan).



Quelques valeurs usuelles

Angle en °	0	30	45	60	90	180
Angle en rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0
$\text{cotan } x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\times$

Soit $f(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x$

Fonctions	$f(x) = \cos x$	$g(x) = \sin x$
Ens. de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Période	2π-périodique	2π-périodique
Parité	paire	impaire
Fonction en (T - x)	$\cos x$	- $\sin x$
Fonction en (T + x)	$\cos x$	$\sin x$
Fonction en $(\frac{\pi}{2} - x)$	$\sin x$	$\cos x$
Fonction en $(\frac{\pi}{2} + x)$	- $\sin x$	$\cos x$
Ens. de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$f'(x) =$ - $\sin x$	$g'(x) = \cos x$
Dérivée de composée fonction	$f(x)$=cos(u(x)) $f'(x)$=-u'(x).sin(u(x))	$g(x)$=sin(u(x)) $g'(x)$=u'(x).cos(u(x))

⋆ Cosinus

$f(x)$ =cos $x \quad D_f = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in D_f,\ x + 2\pi \in D_f \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad$ d'où $\quad f$ est 2π-périodique.

$\forall\, x \in D_f,\ -x \in D_f, \quad f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x) \quad$ d'où $\quad f$ est paire.

$\frac{f(\frac{\pi}{2}+x)+f(\frac{\pi}{2}-x)}{2} = 0$ donc $\mathrm{I}\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

D'après la périodicité, on peut restreindre l'étude de f sur $[-\pi;\ \pi]$, la parité de f nous permet de restreindre le domaine d'étude à $[0;\ \pi]$ et la symétrie centrale de centre I $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ permet de restreindre l'étude de f au domaine d'étude $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
Signe de $f'(x)$	$-$
Sens de variation de f	$1 \searrow 0$

⋆ Sinus

$g(x)$ =sin $x \quad D_g = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in D_g,\ x + 2\pi \in D_g \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad$ d'où $\quad g$ est 2π-périodique.

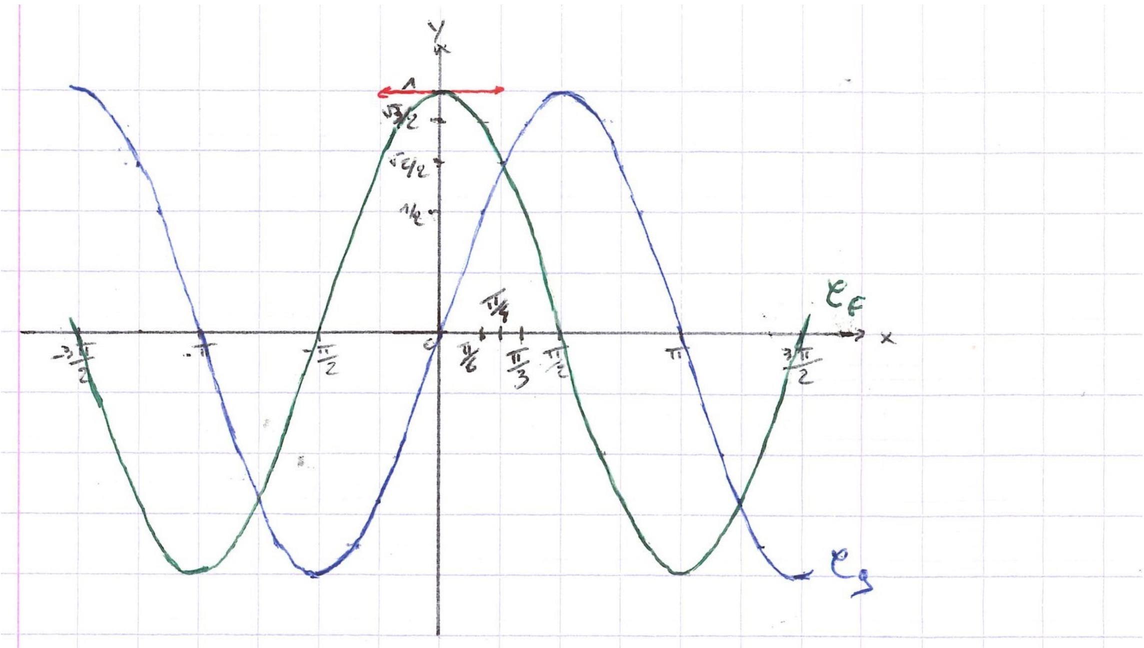
$\forall\, x \in D_g,\ -x \in D_g, \quad g(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -g(x) \quad$ d'où $\quad g$ est impaire.

$g(\frac{\pi}{2} + x) = g(\frac{\pi}{2} - x)$ donc $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

D'après la périodicité, on peut restreindre l'étude de g sur $[-\pi;\ \pi]$, la parité de g nous permet de restreindre le domaine d'étude à $[0;\ \pi]$ et la symétrie axiale d'axe $x = \frac{\pi}{2}$ permet de restreindre l'étude de g au domaine d'étude $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $g'(x)$	$+$	
Sens de variation de g	0 $\nearrow$	1

Représentations graphiques des fonctions cosinus ($\mathcal{C}_f$) et sinus ($\mathcal{C}_g$)



Pour obtenir la courbe $\mathcal{C}_g$ d'équation $y = \sin x$, l'axe des abscisses reste le même mais l'axe des ordonnées est translaté de $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{i}$.
De même $\mathcal{C}_f$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_g$ par translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{i}$.

Soit $h(x) = \tan x \quad i(x) = \text{cotan } x$

Fonctions	$h(x) = \tan x$	$i(x) = \text{cotan } x$
Ens. de définition	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$
Période	π-périodique	π-périodique
Parité	impaire	impaire
Fonction en (T - x)	- tan x	- cotan x
Fonction en (T + x)	tan x	cotan x
Fonction en $(\frac{\pi}{2} - x)$	cotan x	tan x
Fonction en $(\frac{\pi}{2} + x)$	- cotan x	- tan x
Ens. de dérivabilité	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$h'(x) = 1+\tan^2 x$ $= \frac{1}{\cos^2 x}$	$i'(x) = -1 - \frac{1}{\tan^2 x}$ $= \frac{-1}{\sin^2 x}$
Dérivée de composée de fonction	$h(x)=\tan(\text{u}(x))$ $h'(x)=\text{u}'(x).(1+\tan^2\text{u}(x))$ $h'(x)=\frac{\text{u}'(x)}{\cos^2\text{u}(x)}$	$i(x)=\text{cotan}(\text{u}(x))$ $i'(x)=-\text{u}'(x).(1+\text{cotan}^2\text{u}(x))$ $i'(x)=-\frac{\text{u}'(x)}{\sin^2\text{u}(x)}$

⋆ Tangente

$h(x) = \tan x \qquad D_h = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\forall\ x \in D_h,\ x+\pi \in D_h \quad \tan(x+\pi) = \tan(x)$ d'où h est π-périodique.

$\forall\ x \in D_h,\ -x \in D_h, \quad h(-x) = \tan(-x) = -\tan(x) = -h(x)$ d'où h est impaire.

On peut donc restreindre l'étude de h à l'intervalle d'étude I$=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

$h(0) = 0 \qquad \lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} h(x) = +\infty.$

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
Signe de $h'(x)$	$+$
Sens de variation de h	$0 \nearrow +\infty$

⋆ Cotangente

$i(x) = \text{cotan } x \qquad D_i = \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$

$\forall\ x \in D_i,\ x+\pi \in D_i \quad \text{cotan}(x+\pi) = \text{cotan}(x)$ d'où i est π-périodique ⚠$0 \in \pi\mathbb{Z}$ et $\pi \in \pi\mathbb{Z}$

$\forall\ x \in D_i,\ -x \in D_i, \quad i(-x) = -i(x)$ d'où i est impaire.

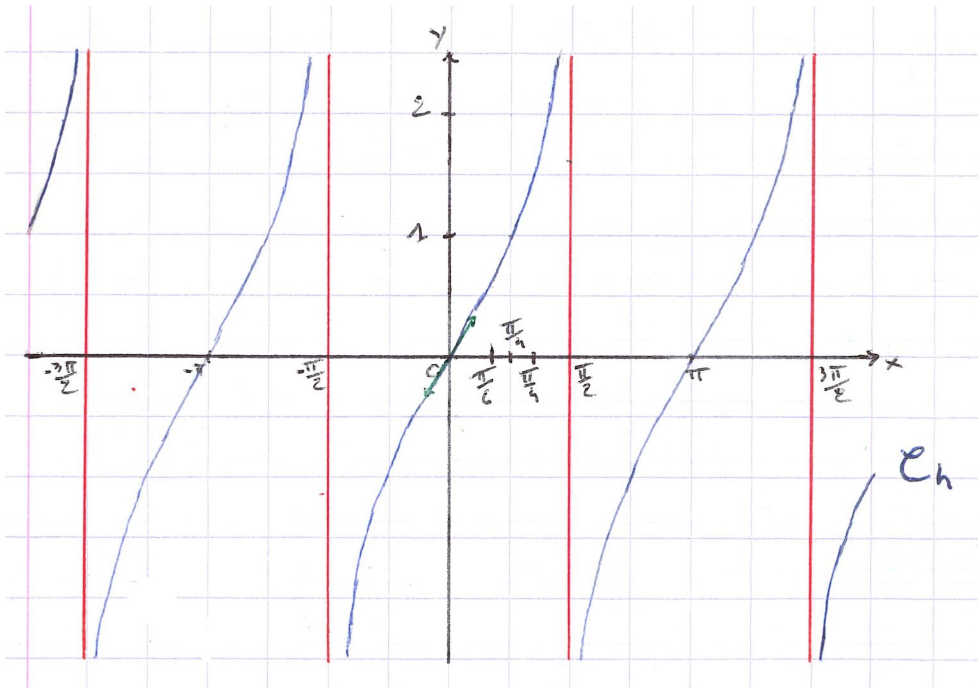
On peut donc restreindre l'étude de i à l'intervalle $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} i(x) = +\infty \qquad i(\frac{\pi}{2}) = 0.$

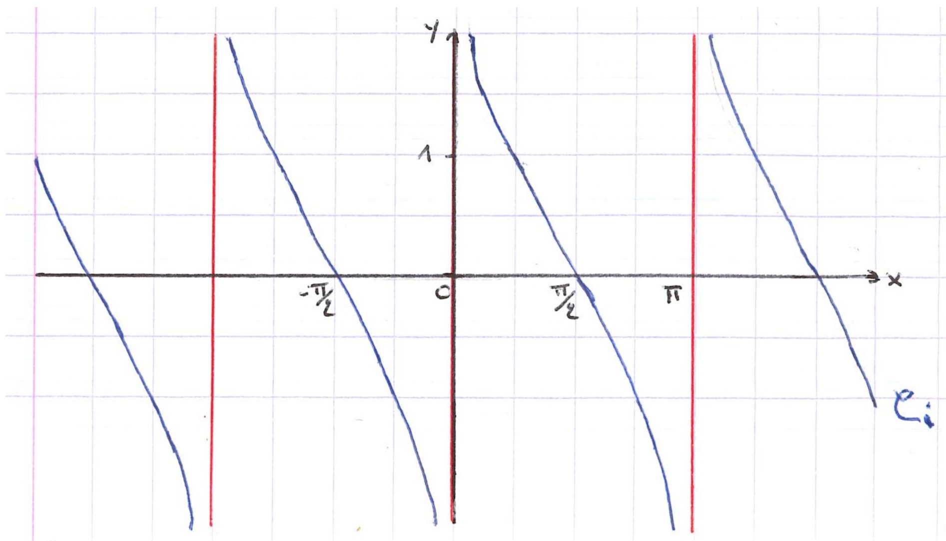
x	0	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $i'(x)$	‖	$-$
Sens de variation de i	‖	$+\infty \searrow 0$

Représentations graphiques des fonctions tangente $(\mathcal{C}_h)$ et cotangente $(\mathcal{C}_i)$

Courbe représentative de la fonction tangente



Courbe représentative de la fonction cotangente



Exercice d'application

$g(x) = \cos(4x)$

$\star$ $D_g = \mathbb{R}$ car g est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de 2 fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $x \longmapsto 4x$ et $x \longmapsto \cos x$.
$\star$ Recherchons T telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ x + \mathrm{T} \in \mathbb{R} \qquad g(x+\mathrm{T}) = g(x)$

$$\text{Donc } \cos(4(x+\mathrm{T})) = \cos(4x) \quad \text{or} \quad \cos(4x) = \cos(4x + 2\pi)$$
$$\cos(4x + 4\mathrm{T}) = \cos(4x + 2\pi)$$
$$\text{Soit } 4\mathrm{T} = 2\pi$$
$$\text{D'où } \mathrm{T} = \frac{\pi}{2}$$

Donc la fonction g est $\frac{\pi}{2}$-périodique. On peut alors restreindre l'étude de g au domaine d'étude $\mathrm{I}_1 = [-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}]$

$\star$ $\forall x \in \mathrm{I}_1,\ -x \in \mathrm{I}_1$ car $[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}] = [-\frac{\pi}{4};\ 0[\cup \{0\} \cup]0;\ \frac{\pi}{4}]$
$g(-x) = \cos\,(4(-x)) = \cos\,(-4x) = \cos\,4x = g(x)$
La fonction g est paire.
Ainsi son étude peut se restreindre à l'intervalle d'étude $\mathrm{I}_2 = [0;\ \frac{\pi}{4}]$.

$\star$ $g\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \cos\,\left(4\left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right) = \cos\,\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = -\sin\,(4x)$
$g\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \cos\,\left(4\left(\frac{\pi}{8} - x\right)\right) = \cos\,\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin\,(4x)$
Donc $\frac{g(\frac{\pi}{8}+x)+g(\frac{\pi}{8}-x)}{2} = 0$ Ainsi $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{8};\ 0\right)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.
On peut, à nouveau, restreindre l'étude de g à l'intervalle d'étude $\mathrm{I}_3 = [0;\ \frac{\pi}{8}]$.

$\star$ La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et même C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de 2 fonctions usuelles ($x \longmapsto 4x$ et $x \longmapsto \cos x$) définies, continues et dérivables et même C^∞ sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in [0;\ \frac{\pi}{8}],\ g'(x) = -4\sin(4x)$

$\star$

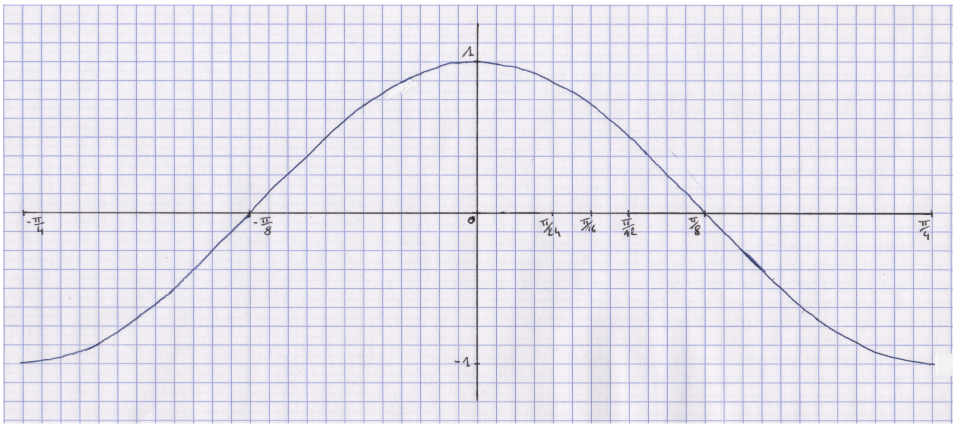
x	0		$\frac{\pi}{8}$
$4x$	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin\,(4x)$	0	$+$	
Signe de $g'(x)$	0	$-$	
Sens de variation de g	1	$\searrow$	0

$\star$ $g(0) = \cos\,(4 \times 0) = 1 \qquad g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\,\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = \cos\,\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\star$ Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$
$g(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

⋆ Représentation graphique



Fonctions réciproques des fonctions circulaires

Une fonction f^{-1} est la réciproque d'une fonction f si cette dernière est bijective sur un domaine I considéré, telle que $\forall x \in \mathrm{I}$, $(f^{-1} o f)(x) = x$.
De même, $\forall x \in \mathrm{J}$ avec $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$, $(f o f^{-1})(x) = x$.
Une fonction est dite bijective, si pour tout x elle admet une unique image y, et pour toute image y un unique antécédent x.
Lorsqu'une fonction f est strictement monotone sur I alors f est bijective et elle réalise une bijection de I sur J=f(I).
Les fonctions réciproques des fonctions circulaires sont les fonctions :
arccosinus (arccos = $\cos^{-1}$), arcsinus (arcsin = $\sin^{-1}$), arctangente (arctan = $\tan^{-1}$) et arccotangente (arccotan = cotan^{-1}).

Fonction	arcsin x	arccos x	arctan x	arccotan x
Ens. de définition	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ens. image	$[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$	$[0;\ \pi]$	$]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}[$	$]0;\ \pi[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ens. de dérivabilité	$]-1;\ 1[$	$]-1;\ 1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$

La dérivée d'une fonction réciproque est de la forme : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$

$\star\ f(x) = \tan x \qquad f^{-1}(x) = \arctan x$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) &= (\arctan x)' \\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} \quad \text{or } \tan(\arctan x) = x \\
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

$\star\ f(x) = \sin x \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x$

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-1;\ 1[,\ (f^{-1})'(x) &= (\arcsin x)' \\
&= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}
\end{aligned}$$

Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$
Posons $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ car $\forall\ x \in\ [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}],\ \cos x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} \quad \text{or } \sin(\arcsin x) = x \\
(f^{-1})'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

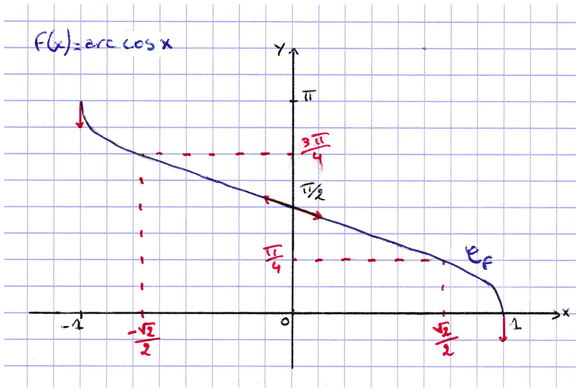
$\star\ f(x) = \cos x \qquad f^{-1}(x) = \arccos x$

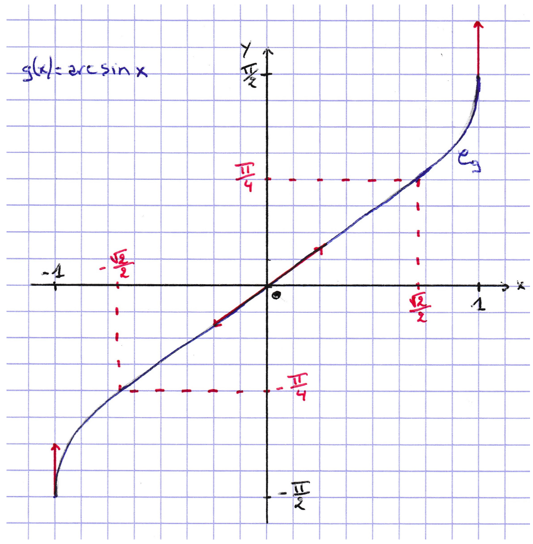
$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-1;\ 1[,\ (f^{-1})'(x) &= (\arccos x)' \\
&= \frac{1}{-\sin(\arccos x)}
\end{aligned}$$

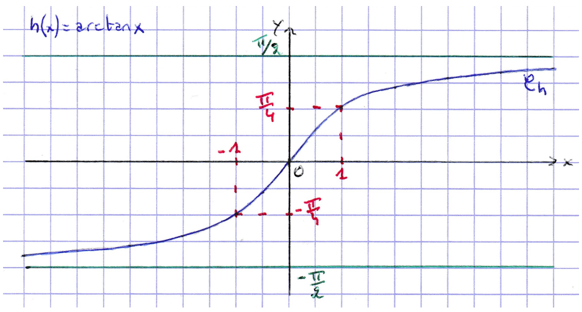
Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$
Posons $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ car $\forall x \in\ [0;\ \pi],\ \sin x \geqslant 0$

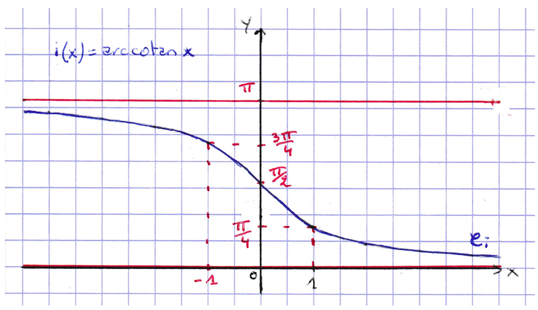
$$\begin{aligned}
\text{Donc } (f^{-1})'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2}} \quad \text{or } \cos(\arccos x) = x \\
(f^{-1})'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

⋆ Représentation graphiques des fonctions réciproques des fonctions circulaires









Formulaire de trigonométrie

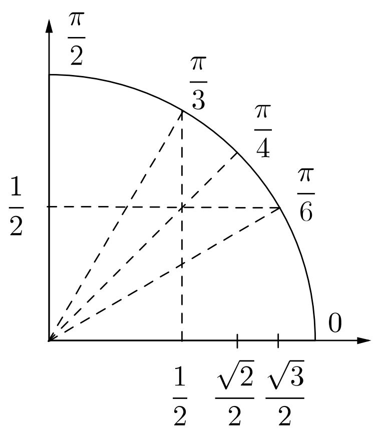
Trigonométrie

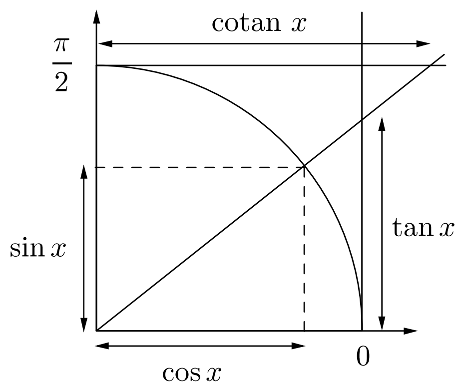
I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\text{cotan } x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\text{cotan } x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\text{cotan } x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\text{cotan } x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\text{cotan } x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \text{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\text{cotan}\ x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin , Arccos , Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [\,-1\,;1\,]$, alors $x = \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = \pi - \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\cos x = \lambda \in [\,-1\,;1\,]$, alors $x = \text{Arccos}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = -\ \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan}\ \lambda \mod \pi$
- Si $\text{cotan}\ x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot}\ \lambda \mod \pi$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin}\ \lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	$\text{Arcsin}\ x$	$\text{Arccos}\ x$	$\text{Arctan}\ x$	$\text{Arccot}\ x$
Ensemble de définition	$[\,-1\,;1\,]$	$[\,-1\,;1\,]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$	$[\,0\,;\pi\,]$	$]\,-\pi/2\,;\pi/2\,[$	$]\,0\,;\pi\,[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$]\,-1\,;1\,[$	$]\,-1\,;1\,[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

3 Relations

$\text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \pi/2$

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } y = \text{Arctan } \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où } \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$\text{Arctan } x + \text{Arccot } x = \pi/2$

$$\text{Arccot } x = \begin{cases} \text{Arctan } 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan } 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$\text{Arctan } x + \text{Arctan } 1/x = \text{sign}(x) \times \pi/2$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan \dfrac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + \mathrm{i}\ \sin a)^n = \cos na + \mathrm{i}\ \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos^3 a - 3\cos a\ \sin^2 a \\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3a &= 3\cos^2 a\ \sin a - \sin^3 a \\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a \end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin \dfrac{nx}{2} \sin \dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} \qquad\qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos \dfrac{nx}{2} \sin \dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$$