CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 9: Dérivation d'un champ de tenseurs

Jeudi 30 novembre 2006

Exercice 1

On considère dans cet exercice un système de coordonnées curvilignes.

1) Determiner la différentielle des tenseurs suivants:

$V = V^i e_i$, $G = g_{i,j} e^i \otimes e^j$

Exercice 2

Montrer que pour les vecteurs duaux les relations de changement de bases par transport du point M en M' deviennent:

$de^i =$ - $\Gamma^i_{j,k} e^j(M) du^k$

Exercice 3

1) Calculer l'accroissement au premier ordre des composantes $g_{i,j}$ du tenseur métrique.

2) En déduire les identitées de Ricci: $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial u_k} = g_{i,l}\ \Gamma^l_{j,k} + g_{l,j}\ \Gamma^l_{i,k}$

Exercice 4

1) Determiner la différentielle du tenseur métrique.

2) A l'aide de l'exercice précédent, démontrer que cette différentielle est nulle.

Exercice 5

On note $g^{i,j}$ la matrice inverse de la matrice des $g_{i,j}$

Montrer que les symboles de Christoffel peuvent être obtenues à partir du tenseur métrique par la formule:

$\Gamma^i_{j,k} = \frac{1}{2} g^{i,h} (\frac{\partial g_{k,h}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{j,h}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u_h})$