CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 8: Formalisme du calcul tensoriel

Jeudi 23 novembre 2006

Exercice 1

1)Expliciter completement les tenseurs dont on donne les composantes ci-dessous:

$(t^i{}_j)$, $(s_i{}^j)$, $(r_k{}^{ll}{}_n)$

2) Donner le type de chacun d'eux.

Exercice 2

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie n, et son dual E^*.On considère le tenseur ci dessous défini sur $E \times E^*$:

$T_M = a^i{}_j \; e_i \otimes e^j$

1) Donner le type de ce tenseur.

2) Donner une base du sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des tenseurs et en deduire la dimension de ce sous espace.

3) On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées de tailles n, Etablir un isomorphisme entre $E \times E^*$ et $\mathcal{M}_n$

4) Que donne la contraction de ce tenseur, quelle quantitée bien connue retrouve t'on?

Exercice 3

On donne la matrice 2×2 des $g^i{}_j$ ci-dessous:

$$g^i{}_j = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Donner le tenseur T_G qui lui correspond.

2) Soit les vecteurs $u = e_1 - e_2$, $v =$ - e_1 Déterminer leurs composantes covariantes.

3) Déterminer $u.u$, $u.v$.

4) On effectue le changement de base $e'_j = a^i{}_j \ e_i$ selon la matrice:

$$a^i{}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determiner les nouvelles composantes du tenseur T_G

Exercice 4

Montrer qu'un tenseur peut toujours être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.