CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 5:
Algèbre linéaire: dualité, formes multilinéaires

Jeudi 2 novembre 2006

Exercice 1

1)Donner un exemple de forme multilinéaire symétrique.

2)Donner un exemple de forme multilinéaire alternée.

3)Expliquer pourquoi le produit mixte de 3 vecteurs de l'espace permet

de définir une forme multilinéaire alternée.

Exercice 2

1) Montrer que : $\varphi \wedge \psi = \frac{(p+q)!}{p!q!}\,\overline{\varphi \otimes \psi}$

2) En déduire que le produit extérieur définie une forme bilinéaire alternée.

Exercice 3

Montrer les propríetées suivantes du produit extérieur:

1)si $\varphi \in \Lambda_p^*(E)$, $\psi \in \Lambda_q^*(E)$, $\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi$

2) Le produit extérieur est associatif.

Exercice 4

On considère dans tout ce paragraphe l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme bilinéaire $b = \Omega_n$ définie par:

$\Omega_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_{n+i}y_i - x_i y_{n+i})$

$x = (x_1, ..., x_{2n})$, $y = (y_1, ..., y_{2n})$

on notera $(e_1, ..., e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$

On rappelle que dans un espace vectoriel (E, b) muni d'une forme bilinéaire b l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F relativement à b est donné par:

$orth(F) = \{x \in E / \forall y \in F, b(x, y) = 0\}$, on dit que b est **non dégénérée** si et seulement si $orth(E) = \{0\}$.

1) Donner une expression de Ω_n pour $n = 1, 2$.

2) Montrer que Ω_1, Ω_2, et plus généralement Ω_n sont antisymétrique.

3) Montrer que Ω_n est non dégénérée.

4) Exhiber la matrice J_n telle que Ω_n(x,y)$=^t x J_n y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 5

Soit W un espace vectoriel réel de dimension n et W^* le dual de W. Sur le produit cartesien $E = W \times W^*$, on considère l'application: Ω définie par $\forall (x, y) \in W$, $\forall \alpha, \beta) \in W^*, \Omega((y, \beta), (x, \alpha)) = \beta(x) - \alpha(y)$.

Montrer que Ω est une forme bilinéaire antisymétrique.