CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 4: Calcul differentiel 2

Jeudi 26 octobre 2006

Exercice 1

On considère les ouverts suivants du plan $\mathbb{R}^2$:

$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$

$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < |x| + |y| < 2\}$

$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2 + 1\}$

$U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |y| > x^2 + 1\}$

Etudier si chacun des ouverts si dessus sont connexes, connexes par arcs, étoilés, determiner leur nombre de composantes connexes.

Exercice 2

On considère la forme différentielle de degré 1:

$\omega(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})dx + \ln \sqrt{x^2 + y^2}dy$

définie dans $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$;

1) Montrer que la forme est exacte.

2) Calculer la dérivée partielle par rapport a x de:

$x \arctan(\frac{y}{x}) + \frac{y}{2} \ln(x^2 + y^2)$

3)Chercher la primitive de ω.

Exercice 3

On considère la forme différentielle de degré 1:

$\omega(x, y) = x^2 dy + y^2 dx$

Calculer l'intégrale curviligne sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a} = 0$

Indication: paramétrer l'ellipse par: $x = a(1 + cos\theta)$, $y = bsin\theta$.

Exercice 4

Soit: $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ fermée définie sur U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ par rapport à (0,0).

Montrer que cette forme est exacte :$\omega = df$.

Indication: introduire la fonction:

$f(x, y) = \int_0^1 (xP(tx, ty) + yQ(tx, ty))dt$

Exercice 5

On considère le champ de pesanteur dont le champ de gradient est donné dans $\mathbb{R}^3$ par:

$(x, y, z) \rightarrow (0, 0, -mg)$

1) Trouver la forme différentielle de degrè 1 associée

2) L'integrer sur un chemin quelconque et montrer qu'elle est exacte.