CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 3: Calcul differentiel 1

Jeudi 19 octobre 2006

Exercice 1

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

1) Montrer qu'elle est différentiable.

2) Soit f la fonction qui à x associe sa norme $\| \ x \ \|_2$ montrer que f n'est pas différentiable en l'origine.

Exercice 2

Soit f, fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ en x_0 et u un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer que l'application $f_u : t \mapsto f(x_0 + tu)$ est différentiable (dérivable) en 0. On dit que l'on a dérivé dans la direction du vecteur u.

2) On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$f(0, 0) = 0$

1) Montrer que f est différentiable dans toute les directions (pour cela, introduire la

fonction f_u.

2) Montrer que f n'est pas différentiable (en $(0,0)$) .

Exercice 3

Soit f la fonction de deux variables définie par:

$f(x,y) = x + y$ si $x \neq y$ et $f(x,y) = 2(x+y)$ si $x = y$

On considère aussi les deux vecteurs, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ et on note $\partial_u f$ la dérivée de f dans la direction du vecteur u.

1) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans la direction des vecteurs e_1 et e_2.

2) Montrer que $\partial_{e_1+e_2} f \neq \partial_{e_1} f + \partial_{e_1} f$

Exercice 4

On considère la fonction p de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par:

$(r,\theta) \mapsto p(r,\theta) = (x,y) = (rcos\theta, rsin\theta)$

Où on note par abus de langage consacré x l'application première projection de $p:\ p_1(r,\theta) = x(r,\theta)$, on traite de même y.

1) Determiner dx et dy.

2) En déduire $J(p)$,la matrice Jacobienne de l'application p.

3) Expliquer brièvement pourquoi cette application est bijective de l'intervalle $]0,+\infty[\times]-\pi;\pi[$ sur $\mathbb{R}^2$ - $\{(0,0)\}$

4) Trouver la matrice Jacobienne de l'application réciproque.

5) Exprimer la dérivée partielle de f en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires. en les expressions des dérivées partielles dans les deux systêmes de

coordonnées.

Exercice 5

Soit S une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$S : (u, v) \mapsto S(u, v)$

1) Rappeler la formule donnant $d_{(u_0,v_0)}S(h, k)$ en fonction des dérivées partielles de S

2) Soit φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$\varphi : x \mapsto (x, x^2)$

Soit f la composée des deux applications (dans le bon sens!):; donner la relation entre $f'(x)$ et $d_x f$;

3) En appliquant le théorème de derivation des fonctions composées , exprimer $f'(x)$ en fonction des dérivées partielles de S

4) Application: on prend $S(u, v) = (u - v)^2$ reprendre la question précédente sur cet exemple; qu'aurait donné un calcul directe?

Exercice 6

2) On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}(x^2 - y^2)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$f(0, 0) = 0$

1) Montrer que f est différentiable.

2) Montrer que les dérivés partielles ne commutent pas.