CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD2: espaces vectoriels normés, continuité

Jeudi 12 octobre 2006

Exercice 1

1)On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Montrer que les normes $\| x \|_1 = \Sigma_{i=1}^n |x_i|$, $\| x \|_p = (\Sigma_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, et $\| x \|_\infty = sup_{1..n}|x_i|$ sont équivalentes.

2) Application: Montrer que les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues:
$f_1 : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^3$
$f_2 : (x, y) \mapsto (|x| + |y|)^{1/2}$

Exercice 2

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a $\lim_{p\to+\infty} \| x \|_p = \| x \|_\infty$.

Exercice 3

Sur $\mathcal{C}[0, 1]$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ On définit:

$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$

$N_\infty(f) = Sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$

Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4

On considère $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ et on muni cet espace de la norme N_1 (convergence en moyenne)

1) Montrer que la suite f_n définie par: $f_n(x) = nx$ sur $[0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ sur $[-1,0]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$ est une suite de Cauchy dans (E, N_1).

2) Montrer que f_n converge vers la fonction f valant 1 sur $]0,1]$ et 0 sur $[-1,0]$.

3)(E, N_1) est-il un espace vectoriel normé complet.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(0,0) = 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et

$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$

Montrer qu'elle est continue si et seulement si $\alpha > 1$.