CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 12:
Initiation à la géométrie riemannienne 1

Jeudi 21 décembre 2006

Exercice 1

On considére le tore T_2 plongé dans $\mathbb{R}^3$

1) Determiner une paramétrisation.

2) Donner alors une base de l'espace tangent a cette variété.

3) Deduire l'expression de la métrique (de plongement).

4) Donner les symboles de Christoffel de cette métrique.

Exercice 2

1) Construire le tore "plat" T_2 comme une variété abstraite espace quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par le reseau $\mathbb{Z}^2$.

2) Déduire une nouvelle métrique sur le tore.

Exercice 3

Pour faire du calcul de variation, on a besoin de considèrer l'extension "en vitesse" d'une variété M. On définit alors une fonctionnelle d'action (Lagrangien) défini sur TM par:

$(x(t), \dot{x}(t)) \to L(x(t), \dot{x}(t))$

On définit alors l'intégrale d'action:

$\int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))dt$

où a, b sont deux points fixés de M

1) Etablir que l'équations des extremales de l'action (Equations d'Euler-Lagrange) sont données par:

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}) - \frac{\partial L}{\partial x^i}$

2) On considère le lagrangien $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^i)^2 - U(x)$. Calculer les extrémales de l'action et retrouver les équations fondamentales de la dynamique du point.

3) On considère le lagrangien $L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, retrouver l'équation des géodésiques.

4) Déterminer les géodésiques de la sphère S^2.